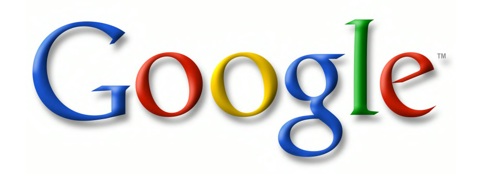
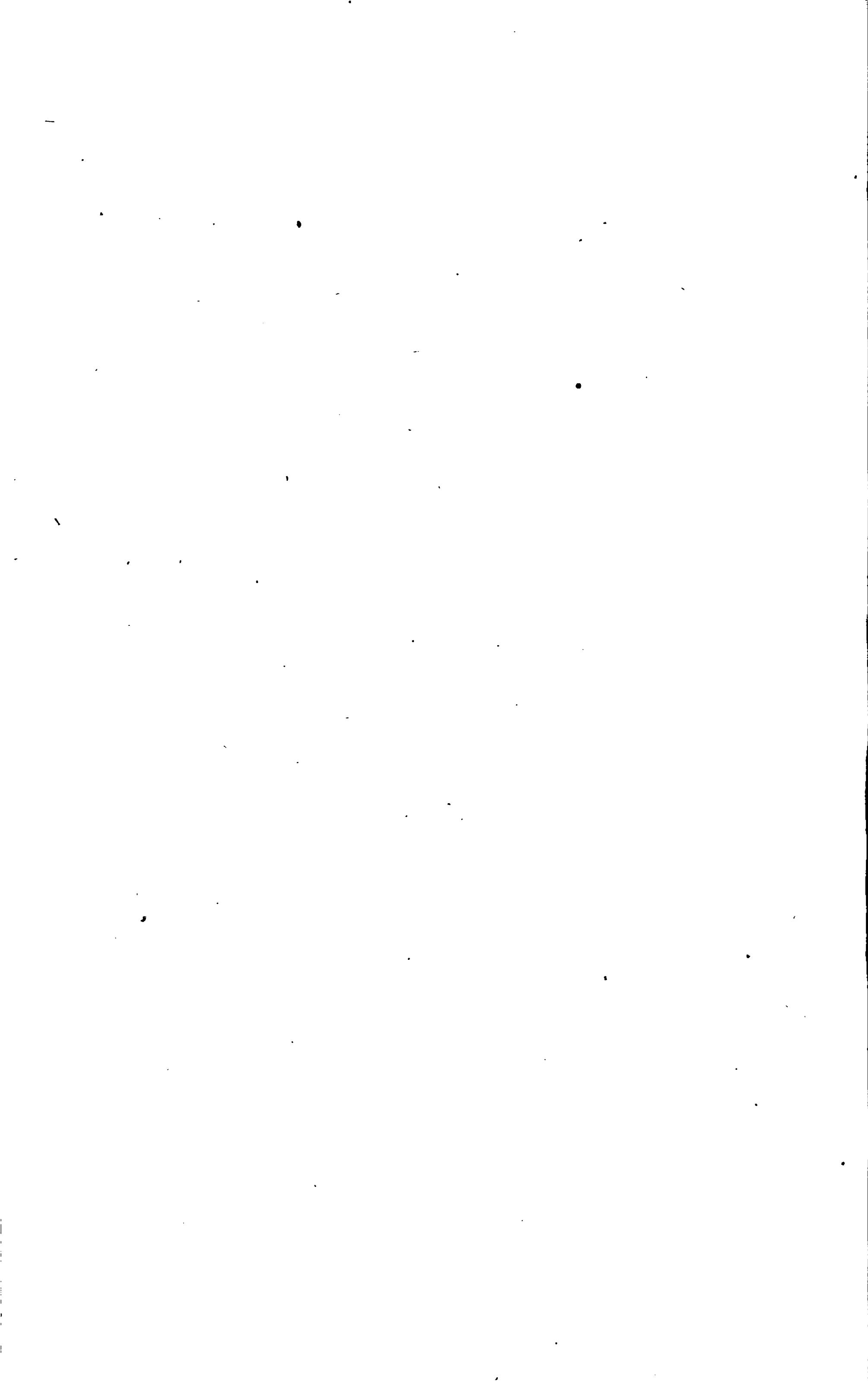






Commentar

zur

Sammlung von Beispielen und Aufgaben

aus der

allgemeinen Arithmetik und Algebra

von

Dr. Eduard Heis,
Professor der Mathematik und Astronomie in Münster.

Für die Schüler

von Gymnasien, Realschulen, höheren Bürgerschulen und Gewerbschulen

bearbeitet von

(Heinrich Friedrich) Dr. Ludwig Matthiessen,
Subrector und Oberlehrer am Königl. preuß. Gymnasium in Husum.



Köln, 1870.
Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.

Druck von M. DuMont-Schauberg. Köln.

Vorwort.

Seit einer Reihe von Jahren mit der vortrefflichen Heis'schen Sammlung von Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra vertraut, sowie durch schriftlichen Verkehr mit dem hochverehrten Autor derselben in seinen Kenntnissen vielfach bereichert, hat der Verfasser dieses Wegweisers und mit ihm viele andere Lehrer der Mathematik bei dem Schulgebrauche der Sammlung immer die Nothwendigkeit empfunden, den Schülern ein Hülfs- oder Regelbuch in die Hand zu geben, wodurch es ihnen ermöglicht werde, die Definitionen, Formeln, Lehrsätze und Beweise nach vollendetem Pensum zu repetiren und dem Gedächtnisse einzuprägen. In Ermangelung eines solchen Buches wurden den Schülern im Laufe des Unterrichts im Anschlusse an die Sammlung die wichtigsten Sätze und Beweise dictirt und von denselben in einem kleinen Hefte gesammelt. So ist dieser Commentar allmählich entstanden. Obwohl es an vortrefflichen Büchern dieser Art nicht fehlt, so liegt es doch auf der Hand, daß bei einem Lehrgegenstande, wie die Mathematik es ist, und bei der auf Gymnasien für diesen Theil des Unterrichts ohnehin sehr beschränkten Anzahl von Stunden es den Schülern möglichst leicht und handlich gemacht werden müsse, das Erlernte zu befestigen. Dies ist nach des Verfassers Erfahrungen nur dadurch zu erreichen, daß man ihnen einen kurzgefaßten Führer an die Hand gibt, welcher sich auch dem von der eingeführten Aufgabensammlung befolgten Gange möglichst knapp anschließt nach Abschnitten, Paragraphen und Nummern. Dieser praktische Zweck war die leitende Idee bei der Abfassung des Buches. Hinsichtlich des etwa zu viel oder zu wenig Gegebenen mögen die Ansprüche mancher Lehrer abweichend sein; indessen glaubt der Verfasser den angedeuteten Zweck, den er zunächst im Auge behalten hat, nämlich concise Darstellung und

praktische Brauchbarkeit, erreicht zu haben, freilich hier und da auf Kosten wissenschaftlicher Form und Vollendung, einer Anforderung, welche allenfalls an umfangreichere Lehrbücher zu stellen ist.

In einer Beziehung dürfte das vorliegende Buch auch den Lehrern der Mathematik eine sehr willkommene Zugabe zur Aufgabensammlung sein, in der nämlich, daß hin und wieder darauf Bedacht genommen ist, die Theilnahme an geschichtlich mathematischen Forschungen anzuregen, ein Interesse, welches seit einem halben Jahrhundert unter den deutschen Mathematikern fast ganz verschwunden war, in neuester Zeit aber durch die Forschungen von Woepcke, Cantor, Steinschneider, Biernatzki, Friedlein, Chasles und Prinz Boncompagni wieder einen erfreulichen Aufschwung genommen hat, wozu auch die vielen historischen und literarischen Notizen, die den neuesten Auflagen des Originals beigefügt sind, einen Beleg liefern.

Die Theorie der allgemeinen Auflösung der Gleichungen ist mit besonderer Sorgfalt und Liebe behandelt, und mit einigen neuen Auflösungsmethoden ausgestattet worden, da der Verfasser diesem Zweige der Algebra mit vorzüglicher Neigung zugethan ist.

Schließlich hat der Verfasser noch die angenehme Pflicht zu erfüllen, hier Herrn Professor Heis seinen Dank auszusprechen für die Humanität, womit derselbe ihm von Rom aus die Mittheilung zustellen ließ, daß dieser Commentar seinem Wunsche entgegenkomme, daß er diese Arbeit als eine verdienstliche ansehe, die der weiteren Verbreitung der Aufgabensammlung nur förderlich sein könne.

Was die äußere Ausstattung des Buches und die Sorgfalt des Druckes anbelangt, so glaube ich dies als ein besonderes Verdienst der verehrlichen Verlagsbuchhandlung um die Empfehlung des Buches dankend hervorheben zu müssen.

Möge denn dieses Hülfsbuch seine Bestimmung erfüllen und bei den Herren Fachgenossen sich einer günstigen Beurtheilung erfreuen!

Husum, den 24. März 1869.

Ludwig Matthiessen.

Inhalt.

Ueber die Benennung der Algebra.

Die Arithmetik (ἀριθμητική) ist bei den Griechen, den Arabern des Mittelalters und den Persern des sechszehnten Jahrhunderts, welche sich desselben Wortes bedienen, eine rein speculative Wissenschaft, deren Gegenstand die Zahlenkunde ist, d. i. die Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen als solchen; also im Wesentlichen dasselbe, was wir in moderner Sprache „Zahlentheorie" nennen. Sie unterscheiden sie streng von dem praktischen Theile, der Analysis und der Logistik (λογιστική), welche je nach den verschiedenen Zweigen ihrer Anwendung von uns allgemeine Arithmetik, Algebra, politische Arithmetik u. s. w. genannt werden.

Nach Euler ist allgemeine Arithmetik die Wissenschaft, die durch Symbole, gewöhnlich durch Buchstaben, allgemein bezeichneten Zahlengrößen durch die verschiedenen Rechnungsarten mit einander zu verbinden. Die Algebra ist die Wissenschaft, aus gegebenen Größen und ihren Beziehungen zu anderen noch unbekannten Größen diese zu entwickeln und zu bestimmen. Der Name stammt her von der arabischen Bezeichnung Aljebr. Jedoch sind die beiden von den Arabern (zuerst von Mohammed ben Musa, dem Chowaresmier) immer zusammen gebrauchten Ausdrücke Aljebr w'almuchabala nur die Bezeichnungen für zwei in unserer Algebra häufig vorkommende specielle Operationen. Der persische Mathematiker des sechszehnten Jahrhunderts, Beha-eddin,*) sagt, indem er von der Einrichtung und Ordnung der algebraischen Gleichungen redet: „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt und etwas dieser Gleiches auf der anderen Seite addirt; das ist Al-jebr. Die homogenen und gleichen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen und das ist

*) Khilasat-al-Hisab (Essenz der Rechenkunst) von Beha-eddin Al-Amuli. Arabisch und deutsch von Nesselmann. Berlin 1843. Man vergleiche auch Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Cap. II.

Al-mokabala." Aljebr ist also Ergänzung, von jabara, restauravit, woher auch das spanische Wort algebrista, ein Wundarzt, stammt. Ein algebraisches Beispiel ist

$$px - q = x^2;\ px = x^2 + q.$$

Al-mokabala kommt von kabala, oppositus fuit, die gegenüber stehenden gleichen Glieder werden gehoben, z. B.

$$x^3 + r = x^2 + px + r;\ x^3 = x^2 + px.$$

In dieser positiven Form werden die Gleichungen ausschließlich betrachtet.

Bei den Indiern heißt die Algebra im engeren Sinne bija-ganita, Causalrechnung, oder avyakta-ganita, Operation mit Unbekannten.

Bei den älteren Italienern heißt sie ars magna, ars rei et census; res ist die erste, census die zweite Potenz der Hauptgröße.

Am Ende des fünfzehnten Jahrhunderts heißt sie vulgo: la regola o l'arte della cosa; oder wieder latinisirt in ars cossica, regula cosae. In Deutschland wird sie von Rudolff von Jawer (1524) und Stifel (1553) promiscue die coss oder regula coss und Algebra benannt. Vieta nannte die Algebra wieder logistica und arithmetica speciosa. In neuerer Zeit sind die Namen Algebra, Analysis, algebraische Analysis und Analytik gäng und gäbe geworden.

Vorbegriffe.

Die Arithmetik hat acht Formen der Zahlenverbindungen, von denen je zwei einen Gegensatz bilden. Diese sind

I. die Summe; II. die Differenz;
III. das Product; IV. der Quotient;
V. die Potenz; VI. die Wurzel;
VII. der Logarithmus; VIII. der Numerus logarithmi.

Die Operationen selbst benennt man, wie folgt:

I. Addiren; II. Subtrahiren;
III. Multipliciren; IV. Dividiren;
V. Potenziren; VI. Radiciren;
VII. Logarithmiren; VIII. Numeriren.

Die Reciprocität dieser Doppelformen der Zahlenverbindungen geht aus nachstehenden Gleichungen hervor, indem die Aufhebung jeder gegenüberstehenden Verbindung die Restituirung der voranstehenden zur Folge hat.

$$\text{I. } a + b = c; \quad \text{II. } a = c - b;$$
$$\text{III. } a \cdot b = c; \quad \text{IV. } a = c : b;$$
$$\text{V. } a^b = c; \quad \text{VI. } a = \sqrt[b]{c};$$
$$\text{VII. } b = \overset{a}{\log}\, c; \quad \text{VIII. } num\ \overset{a}{\log}\, b = c.$$

§. 1.

Begriff und Anwendung der Addition.

1) Eine Zahl b zu einer Zahl a addiren heißt, von a aus um so viele Einheiten fortschreiten, als b anzeigt. Zwei oder mehrere Zahlen zu einander addiren heißt demnach, von einer derselben folgeweise um so viele Einheiten fortschreiten oder zu ihr so viele Einheiten hinzufügen, als die übrigen anzeigen. Das Ergebniß der Addition ist die Summe. Die zu vereinigenden Zahlen heißen Summanden. Das Zeichen der Addition ist + (gelesen: plus).

2) Die Summe von p und q heißt $p + q$, also

$$p + q = p + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{(q)}.$$

§. 2.

Begriff und Anwendung der Subtraction.

1) Eine Zahl b von einer Zahl a subtrahiren heißt, von a aus um so viele Einheiten rückwärts schreiten, als b anzeigt. Dasselbe heißt a um b vermindern. Die Zahl a heißt Minuend, b Subtrahend und das Ergebniß der Subtraction Rest, Unterschied oder Differenz. Das Zeichen der Subtraction ist — (gelesen: minus).

2) α) Die um b verminderte Zahl a ist die Differenz $a - b$, also

$$a - b = a \underbrace{- 1 - 1 - 1 - \ldots\ldots - 1}_{(b)}.$$

5) Der eine Summand einer Summe wird aus der Summe und dem anderen Summanden gefunden, indem man diesen von jener subtrahirt.

7) α) Der Minuend einer Differenz wird gefunden, indem man den Subtrahenden zur Differenz addirt.

β) Der Subtrahend einer Differenz wird gefunden, indem man den Minuenden um die Differenz vermindert.

§. 3.

Begriff und Anwendung der Multiplication.

1) Eine Zahl a mit einer Zahl b multipliciren heißt, a so viel mal zu sich selbst addiren, als b Einheiten enthält. a heißt

Multiplicand, b Multiplicator. Das Ergebniß der Multiplication ist das Product. Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder $\cdot$, welches bei einfachen Zahlenverbindungen dieser Art weggelassen werden kann. Die Zahlen a und b haben den gemeinschaftlichen Namen „Factoren".

2) Ist der Multiplicator p, der Multiplicand q, so ist das Product $q \times p$ oder $q \cdot p$ oder auch $q\,p$, also

$$q \times p = \underbrace{q + q + q + \ldots\ldots + q}_{(p)}.$$

§. 4.

Begriff und Anwendung der Division.

1) Eine Zahl a durch eine Zahl b dividiren heißt, diejenige Zahl suchen, welche mit b multiplicirt a gibt. Dasselbe heißt b in a dividiren. Die Zahl a heißt Dividend, b Divisor. Das Ergebniß der Division ist der Quotient. Das Zeichen der Division ist : oder ein Querstrich, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor gesetzt wird.

2) Ist q der Dividend, p der Divisor, so heißt der Quotient $q : p$ oder $\frac{q}{p}$ (gelesen: q dividirt durch p, oder p dividirt in q).

6) Der Multiplicand eines Products wird gefunden, indem man das Product durch den Multiplicator dividirt.

13) Der Dividend eines Quotienten wird gefunden, indem man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt. Der Divisor eines Quotienten wird gefunden, indem man den Quotienten in seinen Dividenden dividirt.

§. 5.

Begriff und Anwendung der Potenzirung.

1) Eine Zahl a mit einer Zahl b potenziren heißt, die Zahl a so oftmal mit sich selbst multipliciren, als b anzeigt. Das aus b gleichen Factoren a gebildete Product heißt Potenz; a heißt Basis, Grundzahl oder Dignand, b Exponent. Die Bezeichnung der $b$ten Potenz von a ist a^b (gelesen: a zur $b$ten oder a hoch b), also

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{(b)}.$$

Die zweite Potenz a^2 heißt auch das Quadrat von a, die 3te a^3 der Cubus, die 4te a^4 das Biquadrat der Zahl a.

§. 6.

Gebrauch der Klammern (Parenthesen).

Sind zwei oder mehrere Zahlen durch + und — mit einander zu einem Rechnungsausdrucke vereinigt, so nennt man denselben **mehrgliedrig**. Sollen mehrgliedrige Ausdrücke als eine Größe in Verbindung mit anderen dargestellt und aufgefaßt werden, so werden sie **eingeklammert**. Um die in einem Rechnungsausdrucke enthaltenen Klammern auch beim Aussprechen ohne die Worte „Klammer" und „Klammer geschlossen" erkennbar zu machen, kann man in **Pausen** lesen. Man spreche die Glieder eines eingeklammerten Ausdruckes rasch hintereinander aus und trenne sie durch eine kleine Pause von den anderen Ausdrücken, z. B.

$a - (b + c)$ gelesen: $a -$ (Pause) $b + c$;
$(a - b) + (c - d)$ gelesen: $a - b$ (Pause) $+$ (Pause) $c - d$;
$(a - b) \cdot (c - d)$ gelesen: $a - b$ (Pause) $\times$ (Pause) $c - d$;
$a - b \cdot c - d$ gelesen: $a -$ (Pause) $b \cdot c$ (Pause) $- d$;

2) α) Unterschied von $a - b + c$ und $a - (b + c)$.

Sind keine Klammern vorhanden, so beginnt die Rechnung von vorne. Der erste Ausdruck bedeutet demnach, daß erst a um b vermindert und der Rest wieder um c vermehrt werden soll; der zweite Ausdruck hingegen, daß a sowol um b als auch um c vermindert werden solle, also in Zeichen ausgedrückt ist

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

β) Unterschied von $a - (b - c)$ und $a - b - c$.

Der erste Ausdruck bedeutet, daß a nicht ganz um b, sondern nur um eine um c Einheiten kleinere Zahl vermindert werden soll. Vermindert man a um b, so sind demgemäß c Einheiten zu viel subtrahirt, mithin sind c Einheiten zur Differenz wieder hinzuzufügen. Folglich ist

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich der Sinn der beiden Gleichungen

$$a + (b + c) = a + b + c,$$
und $$a + (b - c) = a + b - c.$$

Aus den vier Gleichungen folgt nun, daß man jeden eingeklammerten Ausdruck **auflösen** kann und daß man dabei die Regel zu beobachten hat: **Steht ein + vor der Klammer, so bleiben die Vorzeichen der einzelnen Glieder dieselben, steht aber — davor, so werden sämmtliche Vorzeichen derselben Klammer umgekehrt.** Schließen mehrere Klammern einander ein, so beginnt man bei ihrer Auflösung entweder mit der **äußersten** oder mit der **innersten**. Bei Quotienten mehrgliedriger Ausdrücke kann die Klammer oft durch den Bruchstrich vertreten werden. (Vergl. Nr. 16.)

Erster Abschnitt.

Sätze über Summen und Differenzen.

§. 7.

$$\text{I.}\quad a + b = b + a.$$
$$\text{II.}\quad (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

Lehrsatz: Man kann die Summanden einer Summe beliebig vertauschen. (Formel I.)

Beweis: Dem Begriff der Summe gemäß bedeutet $a + b$ die Summe der Einheiten, welche a und b einzeln in sich begreifen. Zerlegt man also die Zahlen in ihre Einheiten, so ist

$$a + b = \underset{(a)}{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1} + \underset{(b)}{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}.$$

Es hat nun auf den Werth der Summe keinen Einfluß, an welcher Stelle man die Addition dieser Einheiten beginnt. Man addire also zuerst die zweite Reihe und zu ihrer Summe b die erste Reihe der Einheiten. Die Summe wird alsdann $b + a$.

1) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl c zu einer Summe $a + b$ zu addiren, kann man auch die Zahl zu dem einen Summanden addiren, oder die Summe aus dem einen Summanden und der Zahl zu dem anderen Summanden addiren. Ueberhaupt ist es für den Werth einer Summe gleichgültig, in welcher Reihenfolge ihre Summanden addirt werden. (Formel II.)

Beweis: Zerlegt man die zu vereinigenden Zahlen in ihre Einheiten, so ist

$$(a + b) + c = \underset{(a)}{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1} + \underset{(b)}{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1} + \underset{(c)}{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}.$$

Die Addition dieser drei Reihen läßt sich nun auf verschiedene Weise bewerkstelligen, z. B. so, daß man zu der Summe der ersten Reihe die der dritten addirt und dann die zweite, also

$$(a + b) + c = (a + c) + b;$$

oder indem man erst die zweite und dritte Reihe zu einer Zahl vereinigt und diese zu a addirt, also

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

12) Unter dem Coefficienten einer Zahl versteht man den an ihm haftenden Zahlenfactor oder die hinzuzudenkende 1, z. B. sind in

13) die Coefficienten von a 12, 9, 4, 3, 1.

§. 8.

I. $a - b + b = a$; II. $a + b - b = a$.
III. $a - (a - b) = b$. IV. $a - a = 0$.

Lehrsatz: Wenn man zu einer Differenz ihren Subtrahenden addirt, so erhält man ihren Minuenden. (Formel I.) Vergl. §. 2. 7) α).

Lehrsatz: Wenn man von einer Summe den einen Summanden subtrahirt, so erhält man den andern. (Formel II.) Vergl. §. 2. 5).

Lehrsatz: Wenn man eine Differenz von ihrem Minuenden subtrahirt, so erhält man den Subtrahenden. (Formel III.) Vergl. §. 2. 7) β).

Lehrsatz: Die Differenz zweier gleichen Zahlen ist gleich Null.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich unmittelbar aus dem Begriffe der Summe und Differenz zweier Zahlen.

23) $a + b = (a - m) + (b + m)$.

Lehrsatz: Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man den einen Summanden um eine beliebige Zahl m vermindert, den anderen um dieselbe Zahl vermehrt.

Beweis: $(a - m) + (b + m) = (a - m) + m + b = a + b$; mit Anwendung von §. 7 II. und §. 8 I.

§. 9.

I. $a + b - c = a - c + b$.
II. $a - b - c = a - c - b$.

Beweismethode: Zum Beweise der arithmetischen Formeln bedient man sich entweder der analytischen Methode, indem man auf Grund der früheren Lehrsätze die eine Seite der Gleichung in die Form der anderen Seite zu verwandeln sucht, oder eines Verfahrens, wobei man mit Anwendung der nachfolgenden Grundsätze beide Seiten der Gleichung gleichzeitig verwandelt, bis man zu einer identischen Gleichung gelangt und aus dieser auf die Richtigkeit der ursprünglichen Gleichung zurückschließt.

Grundsatz: Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a.$$

Folgesatz: Gleiches zu Gleichem addirt und Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches.

Voraussetzung: $a = b$,
$c = d$.

Behauptung: $a + c = b + d$,
$a - c = b - d$.

1) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl c von einer Summe $a + b$ zu subtrahiren, kann man auch die Zahl c erst von dem einen Summanden subtrahiren. (Formel I.)

Beweis: Man addire beiderseits c, so ist zu beweisen, daß

$$(a + b) - c + c = (a - c) + b + c.$$

Nun ist $a + b = (a - c) + c + b$, nach §. 8 I u. §. 7 II,
$a + b = a + b$ nach §. 8 I.

Aus dieser identischen Gleichung folgt die Richtigkeit der ursprünglichen.

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl b zur Differenz $a - c$ zu addiren, kann man auch erst die Zahl b zum Minuenden addiren. (Formel I, Umkehrung.)

Beweis: Man addire beiderseits c, also

$(a - c) + b + c = (a + b) - c + c$.
$(a - c) + c + b = (a + b)$ nach §. 7 II und 8 I,
$a + b = a + b$ nach §. 8 I.

3) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl c von einer Differenz $a - b$ zu subtrahiren, kann man die Zahl erst von dem Minuenden subtrahiren. (Formel II.)

Beweis: Addire beiderseits c, also

$(a - b) - c + c = (a - c) - b + c$,
$a - b = (a - c) + c - b$, §. 8 I u. §. 9 I,
$a - b = a - b$. §. 8 I.

§. 10.

$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b.$$

1) **Lehrsatz:** Statt eine Summe von einer Zahl zu subtrahiren, kann man die einzelnen Summanden nacheinander subtrahiren in beliebiger Reihenfolge.

Beweis: Addire beiderseits $b + c$, also

$a - (b + c) + (b + c) = (a - b) - c + (b + c)$
$a = (a - b) - c + c + b$, §. 8 I und §. 7 II,
$a = (a - b) + b = a$. §. 8 I.

Lehrsatz: Statt eine Zahl von einer Differenz zu subtrahiren, kann man auch die Summe aus dem Subtrahenden und der Zahl von dem Minuenden subtrahiren. (Umkehrung der Formel.)

Beweis: Addire beiderseits $b + c$ u. s. w.

6) Zwei gleichnamige Größen mit ungleichen Coefficienten werden von einander subtrahirt, indem man den gemeinschaftlichen Factor mit der Differenz der ungleichen Coefficienten multiplicirt.

16) $a - b = (a + c) - (b + c)$.

Lehrsatz: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man zum Minuenden und Subtrahenden eine und dieselbe Zahl addirt.

Identitätsbeweis: Addirt man beiderseits $b + c$, so gelangt man mit Anwendung von §. 8 I zu der identischen Gleichung

$$a + c = a + c.$$

Analytischer Beweis:

$$\begin{aligned} a - b &= (a - b) + c - c, \text{ §. 8 II.} \\ &= (a + c) - b - c, \text{ §. 9 I.} \\ &= (a + c) - (b + c), \text{ §. 10.} \end{aligned}$$

§. 11.

$$\text{I. } a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.$$
$$\text{II. } (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

1) α) Lehrsatz: Statt eine Differenz zu einer Zahl zu addiren, kann man entweder den Subtrahenden subtrahiren von der Summe aus dem Minuenden und der Zahl, oder: den Minuenden addiren zur Differenz aus der Zahl und dem Subtrahenden. (Formel I, vgl. §. 9 I.)

Beweis: Addire beiderseits c, also

$$\begin{aligned} a + (b - c) + c &= (a + b) - c + c, \\ a + b &= a + b. \text{ §. 7 II und §. 8 I.} \end{aligned}$$

β) Lehrsatz: Statt zwei Differenzen zu einander zu addiren, kann man auch die Summe der Subtrahenden subtrahiren von der Summe der Minuenden. (Formel II.)

Beweis: $(a - b) + (c - d) = (a - b) + c - d$ nach §. 11. I.
$= (a + c) - b - d = (a + c) - (b + d)$ n. §. 9 I u. § 10.

§. 12.

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b = c + a - b.$$

1) Lehrsatz: Statt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahiren, kann man auch den Subtrahenden addiren zur Differenz aus der Zahl und dem Minuenden.

Behauptung: $a - (b - c) = a - b + c$.

Beweis: Addirt man beiderseits $b - c$, so erhält man

$$a = (a - b + c) + (b - c) \text{ nach §. 8 I},$$
$$a = (a - b + c) - c + b \text{ nach §. 11 I},$$
$$a = a - b + b = a \text{ nach §. 8 II und I}.$$

2) Lehrsatz: Statt eine Zahl zu einer Differenz zu addiren, kann man auch die Differenz aus dem Subtrahenden und der Zahl von dem Minuenden subtrahiren. (Umkehrung von 1.)

Lehrsatz: Statt von einer Summe eine Zahl zu subtrahiren, welche größer ist, als einer der Summanden, kann man auch die Differenz aus der Zahl und dem einen Summanden von dem anderen subtrahiren.

Behauptung: $(a + c) - b = a - (b - c)$, $b > c$.

Beweis: Addirt man beiderseits $b - c$, so erhält man

$$(b + c) - b + b - c = a \text{ nach §. 8 I},$$
$$(a + c) - c = a \text{ nach §. 8 I},$$
$$a = a \text{ nach §. 8 II}.$$

22) $a - b = a - c - (b - c)$.

Lehrsatz: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man vom Minuenden und Subtrahenden eine und dieselbe Zahl subtrahirt.

Beweis: $a - b = [(a - b) - c] + c = [(a - c) - b] + c$ nach §. 9 II,

$$= (a - c) - (b - c) \text{ nach §. 12}.$$

§. 13 a.

Vereinigung mehrgliederiger Ausdrücke.

Regel: Mehrgliedrige Ausdrücke, in denen Glieder von gleicher Benennung wiederholt vorkommen, lassen sich vereinigen, indem man sie nach den gleichbenannten Größen ordnet und zusammenfaßt. (Vergl. §. 6.)

§. 13 b.

Wiederholungsbeispiele.

17) α) $(m + n) + (m - n) = 2\,m$.

Lehrsatz: Wenn man zur Summe zweier Zahlen den Unterschied derselben Zahlen addirt, so erhält man den doppelten Minuenden.

β) $(m + n) - (m - n) = 2\,n$.

Lehrsatz: Wenn man von der Summe zweier Zahlen den Unterschied derselben Zahlen subtrahirt, so erhält man den doppelten Subtrahenden.

Zweiter Abschnitt.

Producte, Quotienten und Brüche, Theilbarkeit der Zahlen, Decimalbrüche, Verhältnisse und Proportionen.

A. Sätze von Producten und Quotienten.

§. 14.

I. $(p \pm q)\,n = pn \pm qn$. II. $m\,(a \pm b) = ma \pm mb$.

1) **Lehrsatz:** Statt eine Summe mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann man die Producte aus den einzelnen Summanden und der Zahl addiren. (Formel I.)

Behauptung: $(p + q)\,n = pn + qn$.

Beweis: Dem Begriffe des Productes gemäß (§. 3) ist

$$\begin{aligned}(p + q)\,n &= (p + q) + (p + q) + (p + q) + \ldots\ldots + \underset{(n)}{(p + q)} \\ &= p + p + p + p + \ldots\ldots + \underset{(n)}{p} \\ &\quad + q + q + q + q + \ldots\ldots + \underset{(n)}{q}\end{aligned}$$

Da es gestattet ist, die Glieder dieser Reihen in horizontaler Richtung aufzusummiren, so ergibt die obere Horizontalreihe pn, die untere qn, folglich

$$(p + q)\,n = pn + qn.$$

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl mit einer Summe zu multipliciren, kann man die Producte aus der Zahl und den einzelnen Summanden addiren. (Formel II.)

Behauptung: $m\,(a + b) = ma + mb$.

Beweis:
$$\begin{aligned}m\,(a + b) &= m + m + m + \ldots\ldots + \underset{(a+b)}{m} \\ &= m + m + m + \ldots\ldots + \underset{(a)}{m} \\ &\quad + m + m + m + \ldots\ldots + \underset{(b)}{m}\end{aligned}$$

Bei der Aufsummirung sämmtlicher $(a + b)$ gleichen Factoren m addire man zuerst die obere Reihe, sodann die untere. Die erste Reihe ma, die zweite mb, mithin

$$m\,(a + b) = ma + mb.$$

3) Lehrsatz: Statt eine Differenz mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann man das Product aus dem Subtrahenden und der Zahl subtrahiren von dem Product aus dem Minuenden und der Zahl. (Formel I.)

Behauptung: $(p - q)\,n = pn - qn.$

Beweis: $(p - q)\,n = \underbrace{(p - q) + (p - q) + \ldots + (p - q)}_{(n)}$

$$= \underbrace{p + p + p + p + \ldots + p}_{(n)}$$
$$- (\underbrace{q + q + q + q + \ldots + q}_{(n)})$$
$$= pn - qn.$$

4) Lehrsatz: Statt eine Zahl mit einer Differenz zu multipliciren, kann man das Product aus dem Subtrahenden und der Zahl subtrahiren von dem Product aus dem Minuenden und der Zahl. (Formel II.)

Behauptung: $m\,(a - b) = ma - mb.$

Erster Beweis: $m(a - b) = \underbrace{m + m + m + \ldots + m}_{(a-b)}.$

Die rechte Seite der Gleichung bedeutet nun offenbar, daß, wenn man m $a$mal zu sich addirte, dies die Forderung, nämlich b Summanden weniger als a zu setzen, eben so oft überschreiten würde, als b Summanden gleich m wieder zurückzunehmen wären, woraus folgt:

$$m\,(a - b) = \underbrace{m + m + m + \ldots + m}_{(a)}$$
$$\underbrace{- m - m - m - \ldots - m}_{(b)}$$
$$= ma - mb.$$

Zweiter Beweis: Addirt man beiderseits der Behauptung mb,

$$m\,(a - b) + mb = ma - mb + mb,$$

so ist gemäß Lehrsatz 2)

$$m\,[(a - b) + b] = ma \text{ nach §. 8 I,}$$
$$ma = ma \text{ nach §. 8 I.}$$

Aus dieser identischen Gleichung ist es gestattet auf die Richtigkeit der ursprünglichen zurück zu schließen.

5) Statt Producte von gleichen Multiplicatoren oder gleichen Multiplicanden zu einander zu addiren, oder von einander zu subtrahiren, kann man die Summe oder Differenz der ungleichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciren. (Umkehrung von Formel I und II.)

§. 15.

I. $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)$.

II. $ab = ba$.

1) **Lehrsatz.** Statt ein Product mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann man auch das Product aus dem Multiplicanden und der Zahl mit dem Multiplicator multipliciren; oder auch den Multiplicanden multipliciren mit dem Product aus dem Multiplicator und der ganzen Zahl. (Formel I.)

Behauptung: α) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$.

β) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Beweis für α):

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= \underbrace{ab + ab + ab + ab + \ldots + ab}_{(c)} \\ &= \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{(b)} \\ &+ \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{(b)} \\ &+ \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{(b)} \\ &\quad \vdots \\ &+ \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{(b)} \; (c)\end{aligned}$$

Addirt man nun die einzelnen Verticalreihen, so gibt jede derselben ac, also sämmtliche Verticalreihen $(a \cdot c) \cdot b$.

Beweis für β): Erwägt man, daß im Ganzen c Horizontalreihen vorhanden sind und jede derselben b Summanden enthält, so ist die Anzahl sämmtlicher Summanden a gleich $b \cdot c$, folglich ist auch

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl mit einem Producte zu multipliciren, kann man entweder das Product aus der Zahl und dem Multiplicanden mit dem Multiplicator multipliciren, oder das Product aus der Zahl und dem Multiplicator multipliciren mit dem Multiplicanden. (Umkehrung von I β.)

3) **Lehrsatz:** In jedem Producte zweier Zahlen können Multiplicator und Multiplicand mit einander vertauscht werden, weßhalb sie auch den gemeinschaftlichen Namen Factoren führen. (Formel II.)

Behauptung: $a \cdot b = b \cdot a$.

Beweis: $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{(b)}$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{(b)}$$
$$+ \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{(b)}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{(b)} \text{ (a)}.$$

Der Multiplicand a ist in Verticalreihen von Einheiten aufgelöst. Da die Reihenfolge der Auffummirung beliebig ist, so addirt man zunächst die Einheiten jeder Horizontalreihe, welche b beträgt. Sämmtliche Horizontalreihen geben also

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + b + \ldots\ldots + b}_{(a)}$$
$$= b \cdot a.$$

Zusatz: Es ist einerlei, in welcher Reihenfolge die Factoren eines Productes mit einander multiplicirt werden.

§. 16.

$$\text{I. } (a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$
$$\text{II. } (a + b)\,(c - d) = ac - ad + bc - bd.$$
$$\text{III. } (a - b)\,(c + d) = ac + ad - bc - bd.$$
$$\text{IV. } (a - b)\,(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

1) **Lehrsatz:** Statt die Summe zweier Zahlen mit einander zu multipliciren, kann man auch jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen multipliciren und die vier Partialproducte addiren. (Formel I.)

Beweis: Man betrachte zunächst die Summe $(c + d)$ als eine Zahl und wende nach einander §. 14, 1) und 2) an, also

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd.$$

2) **Lehrsatz:** Statt die Summe zweier Zahlen mit der Differenz zweier anderen zu multipliciren, kann man die Differenzen der Producte aus den einzelnen Summanden multiplicirt mit dem Minuenden und dem Subtrahenden zu einander addiren. (Formel II.)

Beweis: Mit Anwendung von §. 14 1) und 4) ist

$$(a + b)\,(c - d) = a\,(c - d) + b\,(c + d)$$
$$= ac - ad + bc - bd.$$

3) **Lehrsatz:** Statt die Differenz zweier Zahlen mit der Summe zweier anderen zu multipliciren, kann

man auch die Producte aus dem Subtrahenden und jedem einzelnen Summanden nach einander subtrahiren von der Summe der Producte aus dem Minuenden und jedem einzelnen Summanden. (Formel III.)

Beweis: Mit Anwendung von §. 14, 2) und 3) ist

$$(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d)$$
$$= ac + ad - bc - bd.$$

4) **Lehrsatz**: Statt die Differenz zweier Zahlen mit der Differenz zweier anderen zu multipliciren, kann man auch die Producte aus den Minuenden und Subtrahenden subtrahiren von der Summe der Producte aus den beiderseitigen Minuenden und den beiderseitigen Subtrahenden. (Formel IV.)

Beweis: Mit Anwendung von §. 14, 2) und 4) ist

$$(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$$
$$= ac - ad - bc + bd$$
$$= (ac + bd) - (ad + bc).$$

5) Regel: Sollen mehrgliedrige Ausdrücke (algebraische Summen) mit einander multiplicirt werden, so multiplicire man sämmtliche Glieder mit einander, die nicht in demselben Ausdrucke oder in derselben Klammer enthalten sind. Die Partialproducte der Glieder von gleichen Vorzeichen werden positiv (+), diejenigen der Glieder von ungleichen Vorzeichen negativ (—).

12) α) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Lehrsatz: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate vermehrt um das doppelte Product aus beiden.

Beweis mit Anwendung von I.

β) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Lehrsatz: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate vermindert um das doppelte Product aus beiden.

Beweis mit Anwendung von IV.

21) $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Lehrsatz: Das Product aus der Summe zweier Zahlen und der Differenz derselben Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Beweis mit Anwendung von II.

29) α) $(a + b + c)(a + b + c)$

$$= (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Lehrsatz: Das Quadrat eines mehrgliedrigen Ausdruckes ist gleich der Summe der Quadrate der einzel-

nen Glieder vermehrt um das doppelte Product aus je zweien.

Beweis mit Anwendung von 5).

45) $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$ (Ausdruck für das 16fache Quadrat des Inhaltes eines Dreieckes von den Seiten a, b, c).

47) $-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd$ (Ausdruck für das 16fache Quadrat des Inhaltes eines Kreisviereckes von den Seiten a, b, c, d).

§. 17.

I. $(a : b) \times b = a$. II. $(a \times b) : b = a$.
III. $a : (a : b) = b$. IV. $a : a = 1$.

1) **Lehrsatz:** Wenn man den Quotienten zweier Zahlen mit dem Divisor multiplicirt, so erhält man den Dividenden. (Formel I.) Vergl. §. 4. 13).

Beweis folgt aus dem Begriffe der Division (§. 4).

Lehrsatz: Wenn man ein Product durch den einen Factor dividirt, so erhält man den anderen. (Formel II.) Vergl. §. 4. 6).

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit b, also

$$(a \times b) : b \times b = a \times b,$$

so erhält man mit Anwendung von §. 17 I

$$a \times b = a \times b.$$

Lehrsatz: Wenn man einen Quotienten in seinen Dividenden dividirt, so erhält man den Divisor. (Formel III.) Vergl. §. 4. 13).

Beweis: Man multiplicire beiderseits mit $(a : b)$, so erhält man

$a = b \times (a : b)$ nach §. 17 I,
$a = (a : b) \times b$ nach §. 15 II,
$a = a$ nach §. 17 I.

Lehrsatz: Der Quotient zweier gleichen Zahlen ist der Einheit gleich. (Formel IV.)

32) $a \cdot b = (a : m) \cdot (b \cdot m)$.

Lehrsatz: Ein Product bleibt ungeändert, wenn man den einen Factor durch eine beliebige Zahl dividirt und den anderen mit derselben Zahl multiplicirt.

Beweis: $a \cdot b = [(a : m) \cdot m] \cdot b$ nach §. 17 I,
$= (a : m) \cdot (b \cdot m)$ nach §. 15 I.

§. 18.

$$\text{I. } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}. \qquad \text{II. } \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}.$$

1) Lehrsatz: Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit einer und derselben Zahl multiplicirt. (Formel I.)

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit $b \cdot c$, also

$$\frac{a}{b} \times (b \cdot c) = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \times (b \cdot c),$$

so erhält man

$$a \times c = a \times c \text{ nach §. 15 I und §. 17 I.}$$

Lehrsatz: Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor durch eine und dieselbe Zahl dividirt. (Formel II.)

Beweis: Mit Anwendung von I erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n \cdot n}{b : n \cdot n} = \frac{a}{b} \text{ nach §. 17 I.}$$

§. 19.

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}.$$

1) Lehrsatz: Statt die Summe oder die Differenz zweier Zahlen durch eine Zahl zu dividiren, kann man die Zahlen einzeln durch die Zahl dividiren.

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit m,

$$\frac{a \pm b}{m} \cdot m = \left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right) \cdot m,$$

so erhält man

$$a \pm b = a \pm b \text{ nach §. 17 I und §. 14 I.}$$

2) Lehrsatz: Statt zwei Quotienten von gemeinschaftlichem Divisor zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren, kann man bezüglich die Summe oder Differenz der beiden Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividiren. (Umkehrung der Formel.)

30) α) Erklärung: Man nennt kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zweier oder mehrerer Zahlen die kleinste Zahl oder das kleinste Product, in welchem jene Zahlen sämmtlich als Factoren enthalten sind. Sind diese Zahlen die Divisoren einer Reihe von Quotienten, so nennt man ihren kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus den General-Divisor der Quotienten.

Lehrsatz: Zwei oder mehrere ungleichnamige Quotienten werden zu einem Quotienten vereinigt, indem man die Dividenden mit denjenigen Factoren des General-Divisors multiplicirt, welche nicht in ihren Divisoren enthalten sind, und die durch ihre zugehörigen Vorzeichen vereinigten Producte durch den General-Divisor dividirt.

Behauptung: Nr. 33 $a)$ $\frac{x}{y} - \frac{z}{t} + \frac{u}{v} = \frac{xtv - zyv + uyt}{ytv}$.

Beweis: Gemäß §. 18 I ist

$$\frac{x}{y} - \frac{z}{t} + \frac{u}{v} = \frac{xtv}{ytv} - \frac{zyv}{tyv} + \frac{uyt}{vyt}.$$

54) **Lehrsatz:** Sind a und b zwei verschiedene Zahlen, so ändert sich jedesmal ihr Quotient, wenn eine und dieselbe Zahl m zum Dividenden und Divisor addirt oder von denselben subtrahirt wird. Der Quotient bleibt dagegen ungeändert, wenn $a = b$ ist.

Beweis: Angenommen, es sei

$$\frac{a \pm m}{b \pm m} = \frac{a}{b},$$

so müßte eine identische Gleichung entstehen, wenn man beiderseits mit $b \pm m$ multiplicirt. Man erhält aber

$$a \pm m = a \pm \frac{a}{b} m,$$

woraus die Bedingung $b = a$ hervorgeht.

Mit Anwendung von §. 18 I würde man auch erhalten

$$\frac{(a \pm m)\, b}{(b \pm m)\, b} = \frac{(b \pm m)\, a}{(b \pm m)\, b},$$

oder

$$ab \pm mb = ba \pm ma,$$

woraus gleichfalls die Bedingung $b = a$ hervorgeht.

§. 20.

Gleichheit eines Quotienten $a : b$ und eines Bruches $\frac{a}{b}$.

Erklärung: Eine Zahl, welche irgend ein Vielfaches von einem aliquoten Theile der Einheit ausdrückt, nennt man zum Unterschiede von den früher als „Ganze" bezeichneten Zahlen Brüche. Jeder Bruch besteht aus zwei ganzen Zahlen, dem Nenner, welcher die Anzahl der gleichen Theile nennt, in welche die Einheit getheilt zu denken ist, und dem Zähler, welcher die

Anzahl jener aliquoten Theile zählt oder angibt. In dem Bruche $\frac{a}{b}$ ist a der Zähler, b der Nenner. Ist $a < b$, so nennt man den Bruch einen ächten, ist $a > b$ einen unächten.

Lehrsatz: Es findet Gleichheit Statt zwischen einem Quotienten $a : b$ und einem Bruche $\frac{a}{b}$, dessen Zähler dem Dividenden, dessen Nenner dem Divisor gleichkommt.

Behauptung: $a : b = \frac{a}{b}$.

Beweis: Setzt man den Quotienten $a : b$ gleich q, so ist gemäß seinem Begriffe

$$a = q \cdot b = b \cdot q.$$

Mithin wird der Quotient $a : b$ gefunden, indem man den Dividenden a in so viele gleiche Theile q theilt, als der Divisor b anzeigt; oder indem man sucht, wie viel mal (nämlich q) der Divisor im Dividenden enthalten sei. Der erste Fall findet seinen Ausdruck in der Gleichung $a = q \cdot b$, der zweite in $a = b \cdot q$. Soll man also mit Berücksichtigung des ersten Falles, was genügend ist, a in so viele gleiche Theile theilen als b anzeigt, so kann man mit Zuziehung von §. 19 jede in a enthaltene Einheit durch b dividiren und darauf die Partialquotienten addiren, also

$$a : b = \big(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + \underset{(a)}{1}\big) : b.$$

Der $b$te Theil der Einheit aber ist ein Bruch, dessen Nenner b und dessen Zähler 1 ist, also $\frac{1}{b}$. Der Ausdruck zur Rechten ist nun aber die Summe von a Summanden gleich $\frac{1}{b}$. Da nach dem Obigen diese Anzahl der gleichen aliquoten Theile $\frac{1}{b}$ durch den Zähler ausgedrückt wird, also ihm gleich ist, so hat man

$$a : b = \big(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + \underset{(a)}{1}\big) : b$$

$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots + \underset{(a)}{\frac{1}{b}} = \frac{a}{b}.$$

Zusatz: Ein Bruch von der Form $\frac{1}{m}$ heißt ein Stammbruch, auch wohl der reciproke Werth von der Zahl m.

4) Die Sätze für die Rechnung mit Quotienten gelten ebenfalls für die mit Brüchen; also

Lehrsatz: Das Product aus einem Bruche und seinem Nenner ist gleich dem Zähler. (§. 17 I.)

Lehrsatz: Der Quotient des Zählers eines Bruches durch den Bruch selbst ist gleich dem Nenner. (§. 17 III.)

Lehrsatz: Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man den Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt. (§. 18 I und II.)

Lehrsatz: Brüche werden vereinigt, indem man ihre Zähler mit denjenigen Factoren ihres Generalnenners multiplicirt, die nicht in ihren Nennern enthalten sind, und alsdann diese gleichnamigen Brüche vereinigt. (§. 19.)

§. 21.

$$\text{I. } (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b.$$
$$\text{II. } (a : m) : n = (a : n) : m.$$

1) Lehrsatz: Statt ein Product durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch den Quotienten aus dem einen Factor und der Zahl mit dem anderen Factor multipliciren. (Formel I.)

Beweis: Multiplicirt man die Gleichung I beiderseits mit c, also

$$(a \cdot b) : c \cdot c = (a : c) \cdot b \cdot c,$$

so erhält man

$$a \cdot b = (a : c) \cdot c \cdot b = a \cdot b \text{ nach §. 17 I und §. 15 I.}$$

2) Lehrsatz: Statt einen Quotienten mit einer Zahl zu multipliciren, kann man auch das Product aus dem Dividenden und der Zahl durch den Divisor dividiren. (Umkehrung von I.)

3) Lehrsatz: Statt einen Quotienten durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch den Quotienten aus dem Dividenden und der Zahl durch den Divisor dividiren. Oder mit anderen Worten: Es ist einerlei, in welcher Reihenfolge eine Zahl durch zwei andere dividirt wird. (Formel II.)

Beweis: Multiplicirt man die Gleichung II beiderseits mit n, so erhält man mit Anwendung von §. 17 I und §. 21 I

$$a : m = (a : n) : m \cdot n$$
$$= (a : n) \cdot n : m = a : m.$$

4) Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplicirt (oder dividirt), indem man seinen Zähler mit der Zahl multiplicirt (oder dividirt, wenn es aufgeht). (Formel I und II.)

Behauptung: I. $\frac{a}{c} \cdot b = \frac{a \cdot b}{c}$.

II. $\frac{a}{m} : n = \frac{a : n}{m}$.

Beweise analog denen von 2) und 3).

§. 22.

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c).$$

1) **Lehrsatz:** Statt einen Quotienten durch eine Zahl zu dividiren, kann man den Dividenden durch das Product aus dem Divisor und der Zahl dividiren; und statt einen Bruch durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch die Zahl mit dem Nenner multipliciren, wenn sie nicht in den Zähler aufgeht.

Beweis: Multiplicirt man die Gleichung beiderseits mit $b \cdot c$ oder $c \cdot b$, also

$$(a : b) : c \cdot (c \cdot b) = a : (b \cdot c) \cdot (b \cdot c),$$

so erhält man

$$(a : b) \cdot b = a \text{ nach §. 15 I und §. 17 I,}$$
$$a = a \text{ nach §. 17 I.}$$

Zusatz: Es ist einerlei, ob eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen nach einander, oder durch das Product der Zahlen dividirt wird.

Formel: $a : b : c : d = a : (b \cdot c \cdot d)$.

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl durch ein Product zu dividiren, kann man die Zahl durch die einzelnen Factoren nach einander dividiren in beliebiger Reihenfolge. (Umkehrung von 1.)

Formel: $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

§. 23.

$$\text{I. } c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}. \quad \text{II. } \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

1) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl mit einem Quotienten zu multipliciren, kann man auch das Product aus der Zahl und dem Dividenden durch den Divisor dividiren; und

statt eine Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, kann man auch das Product aus der Zahl und dem Zähler durch den Nenner dividiren. (Formel I.)

Beweis: Multiplicirt man die Gleichung I beiderseits mit b, so erhält man mit Anwendung von §. 15 I und §. 17 I die Gleichung $c \cdot a = c \cdot a$.

2) Lehrsatz: Statt einen Quotienten mit einem Quotienten zu multipliciren, kann man auch das Product der Dividenden durch das Product der Divisoren dividiren; und

statt einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren, kann man auch Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multipliciren. (Formel II.)

Beweis: Multiplicirt man beiderseits die Gleichung II mit $n \cdot q$, also

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot (n \cdot q) = \frac{mp}{nq} \cdot (n \cdot q),$$

so erhält man

$$\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = mp \text{ nach §. 15 I und §. 17 I,}$$

$$m \cdot p = m \cdot p \text{ nach §. 17 I.}$$

35) Die in §. 15 für ganze Zahlen aufgestellten Sätze gelten auch für Bruchzahlen. Weil nämlich mittels wiederholter Anwendung von §. 23 II allgemein

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u} \cdot \ldots\ldots = \frac{m \cdot p \cdot r \cdot t \ldots\ldots}{n \cdot q \cdot s \cdot u \ldots\ldots}$$

ist, so kann man nun §. 15 I auf die Bestandtheile des Bruches anwenden; also

$$\frac{mprt\ldots.}{nqsu\ldots.} = \frac{mrpt\ldots}{nsqu\ldots} = \frac{mtpr\ldots}{nuqs\ldots},$$

also mit Anwendung von §. 23 II auf diese Ausdrücke

$$\frac{mprt\ldots}{nqsu\ldots} = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{u} \ldots = \frac{m}{n} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \ldots$$

§. 24.

$$\text{I. } a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

$$\text{II. } \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m : p}{n : q} = \frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}.$$

1) Lehrsatz: Statt eine ganze Zahl durch einen Quotienten zu dividiren, kann man den Quotienten aus der Zahl und dem Dividenden mit dem Divisor multipliciren. (Formel I.)

Behauptung: $a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c$.

Beweis: Dividirt man beiderseits durch c, also

$$a : \frac{b}{c} : c = (a : b) \cdot c : c,$$

so erhält man

$$a : \left(\frac{b}{c} \cdot c\right) = a : b \text{ nach §. 22 und §. 17 II},$$
$$a : b \quad = a : b \text{ nach §. 17 I}.$$

Lehrsatz: Statt eine ganze Zahl durch einen Quotienten zu dividiren, kann man auch den Divisor mit der Zahl multipliciren. (Formel I.)

Behauptung: $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{b}{c}$, also

$$a : \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c},$$

so erhält man

$$a = \frac{ac \cdot b}{b \cdot c} = a \text{ nach §. 23 II und §. 18 II}.$$

Lehrsatz: Statt eine Zahl durch einen Quotienten zu dividiren, kann man die Zahl mit dem umgekehrten Quotienten multipliciren.

Behauptung: $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$,

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit b, also

$$a : \frac{b}{c} \cdot b = a \cdot \frac{c}{b} \cdot b,$$

so erhält man mit Anwendung der ersten Formel

$$a : b \cdot c \cdot b = a \cdot c \text{ nach §. 17 I},$$
$$a \cdot c \quad = a \cdot c \text{ nach §. 15 I und §. 17 I}.$$

Lehrsatz: Statt eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, kann man

entweder die Zahl durch den Zähler dividiren und mit dem Nenner multipliciren;

oder die Zahl mit dem Nenner multipliciren und durch den Zähler dividiren;

oder die Zahl mit dem umgekehrten Bruch multipliciren.

Lehrsatz: Statt einen Quotienten (oder Bruch) mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann man den Dividenden (oder Zähler) dividiren durch den Quotienten aus dem Divisor (oder Nenner) und der Zahl. (Umkehrung von Formel I.)

Behauptung: $(a : b) \cdot c = a : \frac{b}{c}$.

Beweis wie bei dem ersten Lehrsatz.

2) Lehrsatz: Statt einen Quotienten durch einen Quotienten zu dividiren, kann man den Quotienten der Dividenden dividiren durch den Quotienten der Divisoren. (Formel II.)

Behauptung: $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m : p}{n : q}$.

Erster Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{p}{q}$, also

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m : p}{n : q} \cdot \frac{p}{q},$$

so erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{m : p \cdot p}{n : q \cdot q} \text{ nach §. 17 I und §. 23 II},$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \text{ nach §. 17 I.}$$

Zweiter Beweis (analytisch):

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n} : p\right) \cdot q = \frac{m : p}{n} \cdot q \text{ nach §. 24 I und §. 21 II},$$

$$= \frac{m : p}{n : q} \text{ nach §. 24 I.}$$

Lehrsatz: Statt einen Quotienten durch einen Quotienten zu dividiren, kann man auch den ersteren mit dem umgekehrten (reciproken) zweiten Quotienten multipliciren. (Formel II.)

Behauptung: $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{p}{q}$, also

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mq}{np} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q},$$

so erhält man

$$\frac{m}{n} = \frac{mq \cdot p}{np \cdot q} = \frac{m}{n} \text{ nach §. 17 I, §. 23 II, §. 18 II.}$$

Lehrsatz: Statt einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren, kann man Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividiren, wenn es aufgeht;
oder den ersten Bruch mit dem umgekehrten Werthe des zweiten multipliciren, wenn jenes nicht aufgeht.

§. 25.

Division durch einen mehrgliedrigen Ausdruck.

$$\text{I. } \frac{mx + my + mz}{x + y + z} = m.$$

$$\text{II. } \frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B} = C - \frac{BC - A}{B}.$$

Erste Formel. Bei der Division eines mehrgliedrigen Ausdruckes (einer algebraischen Summe) durch eine andere, wird ein Ausdruck oder eine algebraische Summe gesucht, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden gibt.

Zweite Formel. Sollen mehrgliedrige Ausdrücke durcheinander dividirt werden, so muß man die Glieder alphabetisch oder lexikalisch nach steigenden oder fallenden Potenzen einer Hauptgröße ordnen. Sind unter den Gliedern Quotienten vorhanden, so bringt man den ganzen Ausdruck auf eine gleiche Benennung, ehe man die Division beginnt. Alsdann dividire man den ersten Ausdruck des Divisors in das erste Glied des Dividenden, multiplicire den Partialquotienten mit dem ganzen Divisor und verfahre mit dem Reste ebenso.

Für die Subtraction positiver und negativer (relativer) Zahlen sind nachstehende aus §. 7 — §. 12 folgende Regeln gültig:

a. Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden zu einander addirt, indem man sie summirt und der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

b. Zahlen mit ungleichen Vorzeichen werden zu einander addirt, indem man ihrer Differenz das Vorzeichen der größeren Zahl gibt.

c. Zahlen mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen werden von einander subtrahirt, indem man das Vorzeichen des Subtrahenden umkehrt und addirt nach a und b.

Beispiele für die Addition:

$$\begin{array}{cccc} +4 & +4 & -4 & -4 \\ +9 & -9 & +9 & -9 \\ \hline +13 & -5 & +5 & -13 \end{array}$$

Beispiele für die Subtraction:

$$\begin{array}{cccc} +4 & +4 & -4 & -4 \\ +9 & -9 & +9 & -9 \\ \hline -5 & +13 & -13 & +5. \end{array}$$

11. α) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$ (§. 16, 21).
    β) $(x^2 - y^2) : (x + y) = x - y$ (§. 16, 21).
14. δ) $(x^3 - y^3) : (x - y) = x^2 + xy + y^2$.
    ε) $(x^3 + y^3) : (x + y) = x^2 - xy + y^2$.
    ζ) $(x^4 - y^4) : (x - y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.
    η) $(x^4 - y^4) : (x + y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$.
    ϑ) $(x^5 - y^5) : (x - y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.
    ι) $(x^5 + y^5) : (x + y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$.

Aus diesen Beispielen folgen nachstehende Lehrsätze über die Theilbarkeit durch die Binome $x - y$ und $x + y$.

I. Die Differenz zweier gleichen ungeraden Potenzen ist stets durch die Differenz der beiden Zahlen theilbar, nicht durch die Summe.

II. Die Summe zweier gleichen ungeraden Potenzen ist durch die Summe der beiden Zahlen theilbar, nicht durch die Differenz.

III. Die Differenz zweier gleichen geraden Potenzen ist sowohl durch die Differenz als durch die Summe der Zahlen theilbar.

IV. Die Summe zweier gleichen geraden Potenzen ist weder durch die Differenz, noch durch die Summe theilbar.

Zusatz: Ist der Divisor eine Differenz, so sind die Glieder des Quotienten sämmtlich positiv. Ist der Divisor eine Summe, so wechseln die Vorzeichen ab.

Zusatz ad IV. Die Summe zweier gleichen geraden Potenzen, deren Exponenten eine Potenz von 2 bilden, läßt sich in trinomische Factoren zerlegen, z. B.

$$x^4 + y^4 = (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2).$$

§. 26.

Null und negative Zahlen.

Erklärung: Null ist das Resultat einer Subtraction, bei welcher der Minuend gleich dem Subtrahenden ist. (§. 8 IV.)

Eine negative Zahl ist das Resultat einer Subtraction, bei welcher der Minuend kleiner als der Subtrahend ist.

Ist $b < c$ und $d < e$, so gelten folgende Formeln:

I. $a + (b - c) = a - (b - c); \; a - (b - c) = a + (c - b).$

II. $a + d(b - c) = a - d(c - b); \; a - d(b - c) = a + d(c - b).$

III. $a \pm (d - e)(b - c) = a \pm (e - d)(c - b).$

IV. $a + \frac{b - c}{d} = a - \frac{c - b}{d}; \; a - \frac{b - c}{d} = a + \frac{c - b}{d}.$

V. $a + \frac{d}{b - c} = a - \frac{d}{c - b}; \; a - \frac{d}{b - c} = a + \frac{d}{c - b}.$

VI. $a \pm \frac{d - e}{b - c} = a \pm \frac{e - d}{c - b}.$

Allgemeine Bemerkungen: Bei einer Subtraction, in welcher die Zahl der Einheiten, um welche man von einer gegebenen Zahl (Minuend) rückwärts schreiten soll, das Maß des Minuenden überschreitet, tritt das Bedürfniß ein, das Zahlengebiet über Null hinaus nach der entgegengesetzten Seite um eine unendliche Reihe von aufeinander folgenden Einheiten zu erweitern. Zum Zeichen des Gegensatzes dieser beiden Zahlengebiete bezeichnet man die Zahlen, welche die Dinge als Einheiten gleicher Art schlichtweg zählen mit +, die übrigen mit — und unterscheidet sie als positive und negative Zahlen. Nun ist klar, daß, wenn man jenes Rückwärtsschreiten vom Positiven bis zum Negativen in umgekehrter Richtung wiederholt, man wieder in das Gebiet der positiven Zahlen gelangen muß. Man hat aus diesem Grunde auch die Namen absolute und relative (inverse) Zahlen eingeführt, wobei letztere neben der absoluten Anzahl gleichartiger Dinge oder Größen zugleich den Gegensatz ihrer Beziehungen bezeichnen. So z. B. ist 4 Thaler ein absoluter Größenbegriff, hingegen 4 Thaler Vermögen ein relativer. Bezeichnen wir es zum Unterschiede von Schulden mit (+ 4), so sind 4 Thaler Schulden (— 4) in Beziehung zum ursprünglich gesetzten Begriffe Vermögen. Da aber das Eine das Inverse des Anderen ist, so ergeben sich hieraus die Beziehungen

$$+ (+ 4) = + 4; \; + (- 4) = - 4.$$
$$- (+ 4) = - 4; \; - (- 4) = + 4.$$

Es sind also beispielsweise (— 4) Thaler Schulden gleich 4 Thaler Vermögen. Die Richtigkeit dieser Gleichung, welche hier durch bloße Verstandesschlüsse bewiesen ist, läßt sich auch analytisch beweisen, wie weiter unten geschieht.

1) Null ist die Differenz zweier gleichen Zahlen, oder das Resultat einer Subtraction, bei welcher Minuend und Subtrahend gleich sind. Sie nimmt mithin die Stelle in der natürlichen Zahlenreihe ein, von der das Zählen ausgeht, und bildet damit den Mittelpunct der relativen Zahlen:

$$\ldots. \; -4, \; -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; +1, \; +2, \; +3, \; +4, \; \ldots.$$

Lehrsatz: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn zu derselben Null addirt oder von derselben Null subtrahirt wird.

Behauptung: $a \pm 0 = a$.

Beweis: $a \pm 0 = a \pm (b - b) = a \pm b \mp b = 0$ gemäß §. 8 I und II.

3) Lehrsatz: Ein Product, unter dessen Factoren Null vorkommt, ist der Null gleich.

Behauptung: $a \cdot 0 \cdot c = 0$.

Beweis: $a \cdot 0 \cdot c = ac0 = ac(b - b) = acb - acb = 0$ gemäß §. 8 IV und §. 14 II.

5. $\frac{0}{a} = 0$.

Beweis: $\frac{0}{a} = \frac{b - b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$ nach §. 8 IV und §. 19.

6) Wenn in $n : k$ sich k allmählich der Gränze Null nähert, so wird der Quotient zuletzt größer, als jede angebbare Zahl und unendlich groß, welches mit dem Zeichen ∞ bezeichnet wird. Wird der Divisor k hingegen größer als jede angebbare Zahl, also ∞, so wird der Quotient unendlich klein, also gleich Null. Demgemäß ist

$$n : 0 = \infty; \; n : \infty = 0.$$

7) $0 : 0$ ist unbestimmt, weil jede beliebige Zahl x mit dem Divisor 0 multiplicirt den Dividenden 0 gibt. Indeß kommen Fälle vor, in denen dieser Ausdruck bestimmte Werthe annimmt, wenn man nämlich anzugeben vermag, wie die beiden Nullen entstanden sind, z. B.:

§. 33b 48) Den Werth des Quotienten $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$ für $x = a$ anzugeben. Setzt man $x = a$, so nimmt der Quotient die Form $\frac{0}{0}$ an. Verkleinert man aber den Quotienten gemäß §. 18 II durch $x - a$, so erhält man

$$\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}.$$

Ein Gleiches gilt von den Ausdrücken $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty : \infty$.

11) Die Lehrsätze sind bereits in §. 25 angeführt.

Formeln: I. $(\pm a) + (-b) = \pm a - b$.
II. $(\pm a) - (-b) = \pm a + b$.

Beweis: Man setze statt $-b$ die gleichbedeutende Differenz $0 - b$ und verfahre nach den Regeln über Addition und Subtraction von Differenzen.

21) Formeln: I. $(+a) \times (+b) = +ab$.
II. $(+a) \times (-b) = -ab$.
III. $(-a) \times (+b) = -ab$.
IV. $(-a) \times (-b) = +ab$.

Regel: Zahlen von gleichen Vorzeichen mit einander multiplicirt geben $+$; Zahlen von ungleichen Vorzeichen $-$.

A. Beweise dieser Sätze durch Verstandesschlüsse.

ad I. Da der Multiplicator $(+b)$ ist, so bedeutet das Product, daß die positive Größe $(+a)$ im wirklichen oder directen Sinne $b$mal zu setzen ist. Da der absolute Werth des Productes gleich ab ist, so ist das Resultat $+ab$.

ad II. Da der Multiplicator $(-b)$, also negativ ist, so bedeutet das zweite Product, daß die positive Größe $(+a)$ im inversen Sinne $b$mal als Summand gesetzt werden soll. Der absolute Werth ist ab und das Product invers, also $-ab$.

ad III. Der Multiplicator ist positiv und bedeutet also das dritte Product, daß die negative Größe $(-a)$ im directen Sinne $b$mal genommen werden soll; also

$$(-a) \times b = (-a) + (-a) + (-a) \ldots + \underset{(b)}{(-a)} = -ab.$$

ad IV. Der Multiplicator und Multiplicand sind beide negativ oder dem positiven invers. Der Sinn des vierten Productes ist also, daß die negative Größe $(-a)$ im inversen Sinne aufgefaßt $b$mal als Summand gesetzt werden soll. Der absolute Werth des Productes ist ab, sein relativer $+ab$.

B. Analytische Beweise dieser Sätze.

Die vier Formeln lassen sich auf die in §. 16 I—IV angeführten zurückführen, da man eine negative Größe $(-a)$ als eine Differenz $b - c$ $(b < c)$ betrachten kann, oder indem man unter den Formen $b - c$ die gleichwerthige $0 - a$ wählt. Die vier obigen Formeln nehmen dann folgende Gestalt an:

I. $(0 + a)(0 + b) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot b + 0 \cdot a + ab = +ab$.

II. $(0 + a)(0 - b) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot b + 0 \cdot a - ab = -ab$.

III. $(0 - a)(0 + b) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot b - 0 \cdot a - ab = -ab$.

IV. $(0 - a)(0 - b) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot b - 0 \cdot a + ab = +ab$.

28) Aus den Sätzen in 21) ergeben sich durch Umkehrung die Regeln für die Division positiver und negativer Zahlen:

$$\text{I.}\quad \frac{+(ab)}{+b} = +a.$$
$$\text{II.}\quad \frac{(-ab)}{-b} = +a.$$
$$\text{III.}\quad \frac{(-ab)}{+b} = -a.$$
$$\text{IV.}\quad \frac{(+ab)}{-b} = -a.$$

Regel: Zahlen von gleichen Vorzeichen durch einander dividirt geben +, Zahlen von ungleichen Vorzeichen —.

B. Maß der Zahlen.

§. 27.

Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors und des gemeinschaftlichen Dividuus.

1) Wenn die Zahl m ein Maß der ganzen Zahlen a, b und c ist, so ist dieselbe auch ein Maß von $a \pm b \pm c$.

Beweis: Angenommen, es sei m in a $p$mal, in b $q$mal, in c $r$mal enthalten, so ist

$$a \pm b \pm c = mp \pm mq \pm mr = m(p \pm q \pm r).$$

Da nun p, q und r ganze Zahlen sind, so ist es auch $p \pm q \pm r$; folglich $a \pm b \pm c$ ein ganzes Vielfaches von m.

2) Ist m ein Maß der ganzen Zahl a, d. h. also a ein ganzes Vielfaches von m, und etwa $a = mp$, so ist

$$a \cdot n = (mp)\,n = m\,(pn),$$
$$a : n = (mp) : n = m \cdot \left(\frac{p}{n}\right),$$

mithin ist m stets ein Maß von $a \cdot n$; von $a : n$ dagegen nur, wenn p ein ganzes Vielfaches von n ist. Ferner ist unter derselben Voraussetzung

$$a = m \cdot p = m \cdot n \left(\frac{p}{n}\right),$$
$$a = m \cdot p = (m : n) \cdot (p \cdot n),$$

mithin $m : n$ stets, $m \cdot n$ dagegen nur dann ein Maß von a, wenn p ein ganzes Vielfaches von n ist.

4) Regel: Soll zu zweien Zahlen A und B $(A > B)$ das größte gemeinschaftliche Maß gesucht werden, so dividire man die kleinere Zahl in die größere, den Rest C wiederum in den vorigen Divisor und so fort, bis der letzte Rest Null wird.

Der letzte Divisor wird die gesuchte Zahl sein. Ist zu mehreren Zahlen der größte gemeinschaftliche Theiler zu finden, so bestimme man ihn erst für zwei, verbinde die gefundene Zahl mit der dritten u. s. f.

Beweis: Die angedeuteten Divisionen geben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= Bb + C, \\ B &= Cc + D, \\ C &= Dd + E, \\ &\;\;\vdots \\ J &= Kk + L, \\ K &= Ll + M, \\ L &= Mm. \end{aligned}$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß
1) M ein gemeinschaftliches Maß von A und B und
2) M das größte Maß von A und B ist.

Es ist nämlich zufolge der letzten Gleichung M ein Maß von L, also nach 1) auch ein Maß von $Ll + M$ oder von K; weil von L und K, darum auch von J u. s. f., endlich ein Maß von B und von A.

Was den zweiten Punct anbetrifft, so kann man ihn indirect beweisen. Wollte man annehmen, es gäbe ein größeres gemeinschaftliches Maß von A und B als M, z. B. P, so müßte P auch ein Maß von C sein, nach der ersten Gleichung, sodann auch ein Maß von D, E u. s. w., natürlich auch von M, was aber gegen die Annahme streiten würde, daß $P > M$ sein soll.

Zusatz: Ist die Einheit das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen, so nennt man diese relativ prim.

Eine absolute Primzahl ist eine solche Zahl, die sich in keine andere ganze Factoren zerlegen läßt, als in sich selbst und die Einheit. Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, welches kleiner ist, als jede angebbare Größe, so nennt man ihr Verhältniß irrational, z. B. 2 und $\sqrt{2}$.

8) Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus zweier oder mehrerer Zahlen ist diejenige kleinste Zahl, in welche sämmtliche Zahlen ohne Rest theilbar sind. Sind von den Zahlen A, B, C u. s. w.

$$\begin{aligned} A &= 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w \cdot 7^x \cdot 11^y \cdot 13^z \ldots. \\ B &= 2^m \cdot 3^n \cdot 5^o \cdot 7^p \cdot 11^q \ldots. \\ C &= 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \ldots. \end{aligned}$$

wobei die Exponenten der Potenzen die Anzahl der gleichen Prim-

factoren angeben, und ist beispielsweise a der größte Exponent von 2, b der von 3, c der von 5, p der von 7, e der von 11 u. s. w., so ist der kleinste Dividuus von A, B, C

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^p \cdot 11^e \dots$$

Es versteht sich von selbst, daß auch beliebig viele Primfactoren fehlen können. Ist z. B. $b = p = 0$, so ist der Dividuus $2^a \cdot 5^c \cdot 11^e \dots$ Hieraus geht folgende Regel hervor:

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus mehrerer Zahlen oder auch mehrgliedriger Ausdrücke wird gefunden, indem man ihren größten gemeinschaftlichen Divisor mit dem Quotienten desselben in die Zahlen oder Ausdrücke multiplicirt.

§. 23.

Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 5, 10, 4, 25, 100, 8, 125, 1000, 9, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 37. Zerlegung der Zahlen in Factoren. Absolute Primzahlen. Zerlegung zusammengesetzter Ausdrücke in Factoren.

2) Eine Zahl ist durch 2 ohne Rest theilbar, wenn die erste Ziffer zur Rechten es ist.

Eine Zahl ist durch 5 ohne Rest theilbar, wenn die erste Ziffer zur Rechten entweder eine 5 oder Null ist.

Eine Zahl ist durch 10 ohne Rest theilbar, wenn die erste Ziffer zur Rechten eine Null ist.

6) Eine Zahl ist durch 4 und 25 ohne Rest theilbar, wenn die beiden letzten Ziffern es sind.

Eine Zahl ist durch 100 ohne Rest theilbar, wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind.

11) Eine Zahl ist durch 8 und 125 ohne Rest theilbar, wenn die erste dreizifferige Klasse zur Rechten es ist.

Eine Zahl ist durch 1000 ohne Rest theilbar, wenn die erste dreizifferige Klasse zur Rechten Nullen sind.

15) Jede Zahl läßt bei der Division durch 9 denselben Rest übrig, welchen die Division ihrer Quersumme durch 9 übrig läßt.

Beweis: Jede beliebige mehrzifferige Zahl kann in Form der Summe

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 + \dots\dots$$

geschrieben werden, wenn a die Einer, b die Zehner, c die Hunderte u. s. w. bezeichnen. Da aber allgemein $z \cdot 10^n$ bei der Division durch 9 den Rest z übrig läßt (Nr. 14), so ist der Rest der gegebenen Zahl

$$a + b + c + d + e + \dots\dots$$

also gleich der Quersumme, oder wenn diese größer als 9 ist, gleich dem Reste, den die Quersumme durch 9 dividirt übrig läßt.

17) Eine jede Zahl ist durch 9 ohne Rest theilbar, wenn ihre Quersumme es ist.

Eine Zahl ist durch 3 ohne Rest theilbar, wenn ihre Quersumme es ist.

Eine Zahl ist durch 6 ohne Rest theilbar, wenn die Quersumme durch 3, die letzte Ziffer durch 2 theilbar ist.

21) $a \cdot 10^{2n}$ läßt durch 11 getheilt denselben Rest wie $+ a$;
$a \cdot 10^{2n-1}$ läßt durch 11 getheilt denselben Rest wie $- a$.

23) Aus 21) ergibt sich folgende Regel für die Theilbarkeit der Zahlen durch 11:

Bei der Division einer mehrzifferigen Zahl durch 11 bleibt kein Rest, wenn die Summe der ungeradstelligen Ziffern vermindert um die Summe der geradstelligen Ziffern gleich Null ist; und ferner

Jede Zahl läßt bei der Division durch 11 denselben Rest übrig, welchen jene Differenz übrig läßt.

Zusätze: Für die Theilbarkeit der Zahlen durch 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 37 fügen wir folgende Sätze hinzu:

I. Eine Zahl ist durch jede der Primzahlen 7, 11, 13 theilbar, wenn die Differenz es ist, welche man erhält, wenn man die Summe der geraden dreizifferigen Klassen von der Summe der ungeraden dreizifferigen Klassen subtrahirt. Der Beweis ist leicht, wenn man nach einander die Reste von $a \cdot 10^{6n}$ bis $f \cdot 10^{5+6n}$ bestimmt.

II. Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die algebraische Summe derjenigen Zahlen es ist, welche man erhält, wenn man die erste, vierte, siebente u. s. w. Ziffer abwechselnd mit $+ 1$ und $- 1$; die zweite, fünfte, achte u. s. w. abwechselnd mit $+ 3$ und $- 3$, die dritte, sechste, neunte u. s. w. abwechselnd mit $+ 2$ und $- 2$ multiplicirt. (Vgl. §. 33b 59.)

III. Eine Zahl ist durch 9 und 11 theilbar, wenn die Summe es ist, welche man erhält, wenn man die Summe ihrer geraden zweizifferigen Klassen zu der Summe ihrer ungeraden zweizifferigen Klassen addirt.

IV. Eine Zahl ist durch 17 theilbar, wenn die algebraische Summe derjenigen Zahlen es ist, welche man erhält, wenn man die ungeraden vierzifferigen Klassen abwechselnd mit $+ 1$ und $- 1$, die geraden vierzifferigen Klassen abwechselnd mit $+ 4$ und $- 4$ multiplicirt.

V. Eine Zahl ist durch 19 und 21 theilbar, wenn die Summe der 4fachen ungeraden zweizifferigen Klassen vermehrt um die geraden zweizifferigen Klassen es ist.

VI. Eine Zahl ist durch 27 und 37 theilbar, wenn die Summe ihrer dreizifferigen Klassen es ist.

VII. Eine Zahl ist durch 23 und 29 theilbar, wenn die Summe der zweifachen ungeraden dreizifferigen Klassen vermindert um die geraden dreizifferigen Klassen es ist.

Bemerkung. Die Zahlen lassen natürlich in allen sonstigen Fällen denselben Rest übrig, wie die jedesmaligen Zahlenverbindungen.

25) Nach 15) sind die Reste der beiden Zahlen sich gleich. Beide Zahlen sind also ein Vielfaches von 9 + demselben Reste. Bei der Subtraction heben sich also die Reste auf und ein Vielfaches von 9 bleibt übrig.

27) Das Product zweier oder mehrerer Zahlen läßt bei der Division durch 9 denselben Rest übrig, wie das Product der Reste der Quersummen.

Beweis: Die Zahlen seien $A, B, C \ldots\ldots$, so ist

$$A = 9p + r_{\prime}$$
$$B = 9q + r_{\prime\prime}$$
$$C = 9s + r_{\prime\prime\prime}$$
u. s. w.

und $A \cdot B \cdot C \ldots = 9P + r_{\prime} \cdot r_{\prime\prime} \cdot r_{\prime\prime\prime} \ldots\ldots$

Ist nun $r_{\prime} \cdot r_{\prime\prime} \cdot r_{\prime\prime\prime} \ldots = 9Q + r_{\prime\prime\prime\prime}$, so ist

$$A \cdot B \cdot C \ldots = 9(P + Q) + r_{\prime\prime\prime\prime}.$$

32) Mit Berücksichtigung von 27). Die Neunerprobe ist in so fern trüglich, als die Summe der Fehler mehrerer Ziffern gleich 9 werden kann. Dasselbe gilt von der Eilferprobe.

C. Decimalbrüche.

§. 29.

Begriff eines Decimalbruches. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

1) Erklärung: Nach der Bezeichnung der decadischen ganzen Zahlen hat die Einheit jeder folgenden von links nach rechts gezählten Ziffer immer den zehnten Theil des Werthes der vorangehenden, und es liegt deshalb sehr nahe, die Reihe der Ziffern über die Einer hinaus fortlaufend zu denken, wodurch eine Bruchform erscheint, die der Entstehung und Bezeichnung nach den decadischen ganzen Zahlen entsprechend ist. Man nennt diese Art von Brüchen Decimalbrüche.

Ein Decimalbruch ist also ein solcher Bruch, dessen Zähler eine beliebige decadische ganze Zahl und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist. Die Ganzen werden von den Ziffern des Bruches durch das Decimalkomma geschieden.

Ein Decimalbruch kann auf verschiedene Art gelesen werden, indem man entweder vom Komma an die einzifferigen Klassen als „Zehntel", „Hundertstel", „Tausendstel" u. s. w. ausdrückt, oder in zweizifferigen Klassen als „Hundertstel", „Zehntausendstel" u. s. w. oder in beliebigen mehrzifferigen Klassen ganz entsprechend.

2) Da das Komma die Ganzen und Zehntel der Zahl von einander zur Linken und zur Rechten scheidet, so werden, dem Werthe und der Bedeutung der gegenseitigen Stellung der einzelnen Ziffern decadischer Zahlen gemäß, durch Verschiebung des Komma's von der Rechten zur Linken um n Stellen die Zahlen durch 10^n dividirt; durch Verschiebung desselben von der Linken zur Rechten um n Stellen mit 10^n multiplicirt.

Werden dem Decimalbruche zur Rechten p Nullen zugesetzt, so wird dadurch nur die Benennung, nicht aber der Werth desselben geändert. Werden hingegen zur Linken zwischen dem Komma und den Zehnteln p Nullen hinzugefügt, so wird der Bruch dadurch auf das 10^pfache verkleinert. Z. B. Nr. 6.

$$0{,}3400 = 0{,}34$$
$$0{,}0034 = 0{,}34 : 100.$$

3) Die unächten Decimalbrüche sind aus Ganzen und ächten Decimalbrüchen zusammengesetzt.

8) Sollen Decimalbrüche addirt oder subtrahirt werden, so setze man dieselben so untereinander, daß Komma unter Komma zu stehen kommt und addire oder subtrahire sie alsdann eben so wie Ganze.

§. 30.

Multiplication und Division. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Periodische Decimalbrüche. Unvollständige Decimalbrüche. Abgekürzte Rechnungen.

1) Regel: Sollen zwei oder mehrere Decimalbrüche mit einander multiplicirt werden, so multiplicire man sie zunächst wie ganze Zahlen ohne Rücksicht auf die Kommata. Alsdann schneide man von dem Producte so viele Decimalstellen ab von der Rechten zur Linken, als in sämmtlichen Factoren enthalten sind.

Beweis: Bezeichnen wir zunächst zwei Factoren allgemein mit den Ausdrücken

$$a + \frac{a_{\prime}}{10^m} \text{ und } b + \frac{b_{\prime}}{10^n},$$

so ist ihr Product gleich

$$ab + \frac{a_{\prime}b}{10^m} + \frac{ab_{\prime}}{10^n} + \frac{a_{\prime}b_{\prime}}{10^{m+n}}.$$

Da nun die Zahlen $a\,a_{\prime}\,b\,b_{\prime}$ sämmtlich Ganze bezeichnen, so hat das Product die Form

$$x + \frac{y}{10^{m+n}}$$

Regel: Sollen zwei Decimalbrüche durcheinander dividirt werden, so läßt sich der Quotient derselben durch einen neuen Decimalbruch seinem wahren Werthe beliebig nahe bringen. Man bringe die beiden Decimalbrüche auf gleiche Benennung und dividire wie bei ganzen Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma. Gibt die Division Ganze, so trenne man sie durch ein Komma von den Decimalstellen ab. Ist dies nicht der Fall, so setze man an die Stelle der Ganzen eine Null, hänge zur Rechten des Zählers eine Null an und bestimme die Zehntel, darauf wieder eine Null und bestimme die Hundertstel u. s. f.

Beweis für die Richtigkeit des Divisionsverfahrens: Dadurch, daß man die Brüche auf gleiche Benennung bringt, indem man durch Hinzusetzen von Nullen die Zahl der Decimalstellen gleichmacht und darauf die Kommata wegläßt, sind Zähler und Nenner des Bruches nur mit einer und derselben Potenz von 10 multiplicirt worden. Wenn nun nach der Bestimmung der Ganzen dem Zähler n Nullen angehängt sind, der Zähler also mit 10^n multiplicirt ist, so wird dadurch, daß man den übrigen hinzukommenden Theil des Quotienten zum Decimalbruche macht, derselbe wieder durch 10^n dividirt, welcher somit den Werth des Bruches richtig angibt. Der Quotient der beiden Decimalbrüche sei also auf die gemeine Bruchform $\frac{a}{b}$ gebracht, so ist

$$\frac{a}{b} = p + \frac{r}{b},$$

wo p die Ganzen, $\frac{r}{b}$ einen ächten Bruch bezeichnet. Multiplicire r mit 10^n und sei

$$\frac{r \cdot 10^n}{b} = q,$$

so ist, wenn hier die Division aufgeht,

$$\frac{a}{b} = p + \frac{r \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = p + \frac{b}{10^n}.$$

Geht die Division nicht auf und gibt einen Rest $r_{\prime}$, so ist $\frac{r_{\prime}}{b} = z < 1$ und

$$\frac{a}{b} = p + \frac{q}{10^n} + \frac{z}{10^n},$$

wo $\frac{z}{10^n}$ offenbar kleiner ist als $\frac{1}{10^n}$ und also unter jede beliebige Fehlergränze gebracht werden kann. Wenn bei dieser Division von einer bestimmten Stelle an der Rest Null wird, so nennt man den Quotienten einen vollständigen Decimalbruch. Drückt der erhaltene Decimalbruch den Werth des Quotienten bis zu jeder angebbaren Gränze der Berechnung den Werth des Quotienten unvollständig aus, so gibt sich dies stets durch eine Periode der Decimalstellen zu erkennen.

11) α) Wenn ein Bruch sich durch einen vollständigen Decimalbruch darstellen lassen soll, so muß dem Vorhergehenden gemäß für ein beliebig großes n einmal q ganz oder z gleich Null werden. Dies ist offenbar nur dann möglich, wenn 10^n durch b theilbar ist.

β) Läßt sich der Decimalbruch nur unvollständig herstellen, so entsteht von einer bestimmten Stelle an eine Periode, weil bei der Division durch den Nenner b nur eine endliche Anzahl verschiedener Reste übrig bleiben können. Kehrt aber einer der Reste wieder, so kehren sowohl dieselben Decimalstellen als dieselben Reste in derselben Reihenfolge (periodisch) wieder.

γ) Da bei der Division durch den Nenner b höchstens $b-1$ verschiedene Reste übrig bleiben können, so hat die Periode höchstens $b-1$ Ziffern.

12) Es ist

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857\ 142 \ldots . \text{ (Periode 142857).}$$

Da die Periode also sechszifferig ist, so muß es bei der Entwicklung des Decimalbruches 6 verschiedene Reste < 7 geben, also die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nun ist klar, daß für die genannten Brüche $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ die aus ihnen entstehende Periode ebenfalls sechszifferig, und zwar von da ab übereinstimmend wird, wo bei der Entwicklung des Bruches $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch die Zähler 1, 2, 3 u. s. w. als Reste auftreten.

So ist z. B. $\frac{2}{7} = 0{,}285714\ 285 \ldots .$

$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428 \ldots .$

Ferner geht aus dem angeführten Satze hervor, daß die Summe oder Differenz irgend welcher dieser Decimalbrüche dieselbe Periode erzeugen muß.

13) Regel: Sollen periodische Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche verwandelt werden, so bringe man sie erst auf eine solche Benennung, daß das Komma unmittelbar vor der Periode steht. Der Werth des auf das Komma folgenden Decimalbruches wird erhalten, indem man die Periode durch so viele Neunen dividirt, als sie Stellen enthält. Z. B.:

14) β) $0{,}297474\ldots = \frac{29{,}7474\ldots}{100} = \frac{29\frac{74}{99}}{100} = \frac{2945}{9900}$.

Beweis: Der rein periodische Decimalbruch sei
$B = 0, abc \ldots . abc \ldots .$ (Periode $abc \ldots .$ $n$stellig),

so ist $B = \frac{abc\ldots}{10^n} + \frac{abc\ldots}{10^{2n}} + \frac{abc\ldots}{10^{3n}} + \ldots$

$$= abc\ldots\left[\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + \ldots\right]$$

$$= abc\ldots \cdot \frac{1}{10^n - 1} = \frac{abc\ldots .}{999\ldots 9}.$$ (Vgl. §. 25. 33.)

15) Wenn unvollständige Decimalbrüche nur bis auf eine bestimmte Stelle angegeben (abgekürzt) werden sollen, so sehe man, ob der Werth aller weggelassenen Stellen mehr oder weniger als 5 Einheiten der ersten Rangstelle zur Linken beträgt. Im ersteren Falle muß die letzte Stelle um 1 erhöht werden; bei 5 kann dies abwechselnd geschehen oder unterbleiben.

Daß von einer beliebigen Stelle an die Summe aller folgenden Decimalbruchtheile kleiner ist als die Einheit der zunächst vorhergehenden Decimale und deshalb der Decimalbruch abgekürzt werden kann, folgt daraus, daß die Summe jedenfalls kleiner ist, als wenn alle folgenden Stellen Neunen wären. Denn dann würde gemäß 13) der Werth der weggelassenen Decimalen erst einer Einheit der nächst vorhergehenden Stelle gleichkommen.

Ein unvollständiger Decimalbruch hat eine Genauigkeit von n Stellen, wenn die $n + 1$te Ziffer ungenau oder zweifelhaft ist.

31) α) Da mit Rücksicht auf die in 15) ausgesprochene Regel der Fehler der letzten Stelle kleiner als $\pm 1 : (2 \cdot 10^n)$ ist, so wird die Genauigkeit des Resultates innerhalb der Gränzen $+ p : (2 \cdot 10^n)$ und $- p : (2 \cdot 10^n)$ liegen.

β) Der wahrscheinliche Fehler ist $\pm$ 0,00025.

γ) Der Fehler beträgt weniger als $\pm 1 : 10^n$, weil gleich

$$\pm \frac{1}{2 \cdot 10^n} - \left(\mp \frac{1}{2 \cdot 10^n}\right) = \pm \frac{1}{10^n}.$$

32) Sollen zwei Decimalbrüche abgekürzt multiplicirt werden, um dadurch unnöthige Rechnungen zu vermeiden, und soll dabei das Resultat bis auf die $p$te Decimale zuverlässig sein, so kann man sich folgende einfache Regel merken: Man kürze oder verlängere die Brüche erforderlichen Falles so, daß die Anzahl der Decimalen des einen Factors entweder vermindert um die Anzahl der ganzen Stellen oder vermehrt um die Anzahl der auf das Komma folgenden Nullen (— ganze Stellen) des anderen Factors p ausmache. Nun multiplicire man mit der höchst geltenden Ziffer des Multiplicators den ganzen Multiplicanden, mit

Ausschluß der letzten Ziffer, zieht aber doch die aus der Multiplication derselben hervorgehenden Zehner zur letzten Decimale des Productes hinzu. Indem man nun die Stelle des Decimalkomma's bestimmt, so wie die höchstgeltende Ziffer des Multiplicators und die niedrigstgeltende des Multiplicanden mit einem Sicherheitsstrich bezeichnet, fährt man auf dieselbe Art mit den übrigen Ziffern fort, indem man die Partialproducte so untereinander schreibt, daß die letzten Ziffern eine Verticalreihe bilden.

Beispiel I. 798,358761 × 2,00371246 (3 Stellen),
abgekürzt: 798,3588 × 2,003712.
Berechnung: 798,3588
2,003712

1596,718 (8 · 2 = 16 wofür 2 Einheiten zugerechnet werden zur letzten Ziffer).
2,395 (3 · 3 = 9)
0,559 (8 · 7 = 56)
0,008 (9 · 1 = 9)
0,001 (7 · 2 = 14)

1599,681

Beispiel II. 34,70003 × 0,00021789 (5 Stellen),
abgekürzt: 34,70 × 0,0002179.
Berechnung: 0,0002179
34,70

0,00654 (9 × 3 = 27)
87 (7 × 4 = 28)
15 (1 × 7 = 7)

0,00756

Beispiel III. Nr. 33 δ) 0,0072246 × 0,56287 (6 Stellen),
abgekürzt: 0,007225 × 0,5629.
Berechnung: 0,007225
0,5629

0,003612 (5 × 5 = 25)
433 (2 × 6 = 12)
14 (2 × 2 = 4)
6 (7 × 9 = 63)

0,004065

In diesen drei Beispielen ist die letzte Ziffer unsicher um $\pm m : (2 \cdot 10^p)$, wo m die Anzahl der positiven Ziffern des einen Factors bedeutet.

Sollen zwei Decimalbrüche abgekürzt dividirt werden, so kann man folgende Regel beobachten: Man rückt im Dividenden und Divisor das Komma um gleichviel Stellen nach rechts oder

links, bis der Divisor ganze Einer hat, und rechne wiederum m Nullen rechts vom Komma für $(-m)$ ganze Ziffern. Soll die Division auf p Decimalen ausgeführt werden, wobei die $p$te Stelle noch unsicher ist, so gebe man dem Dividenden p Decimalen und ersetze die fehlenden Stellen durch Nullen, dem Divisor hingegen so viele Decimalen als p beträgt, vermehrt um die Anzahl der (+)„ ganzen oder (—)„ ganzen Ziffern des Quotienten, welche sich leicht vorher angeben lassen.

Beispiel I: 15,99681002 : 0,020037 (4 Stellen),
das Komma gerückt: 1599,681002 : 2,0037 (Quotient + 3 Ganze),
abgekürzt: 1599,6810 : 2,0037~~000~~ = 798,3635

1402,5900	(0 × 7 = 0)
197,0910	
180,3330	(0 × 9 = 0)
16,7580	
16,0296	(0 × 8 = 0)
7284	
6011	(7 × 3 = 21)
1273	
1202	(3 × 6 = 18)
71	
60	(0 × 3 = 0)
11	
10	(0 × 5 = 0)
1	

Beispiel II: 0,00756 : 0,000217891 (2 Stellen),
das Komma gerückt: 75,6 : 2,17891 (Quotient + 2 Ganze),
abgekürzt: 75,60 : 2,178~~9~~ = 34,70

65,37	(9 × 3 = 27)
10,23	
8,71	(8 × 4 = 32)
1,52	
1,52	(7 × 7 = 49)
0	
0	(1 × 0 = 0)
0	

Beispiel III: 0,0040651 : 0,56291 (5 Stellen),
das Komma gerückt: 0,040651 : 5,6291 (Quotient—2Ganze),
abgekürzt: 0,04065 : 5,629 = 0,00722
3940 (9 × 7 = 63)
———
125
112 (2 × 2 = 4)
———
13
11 (6 × 2 = 12)
———
2

D. Verhältnisse und Proportionen.

§. 31.

Verhältnisse.

1) **Erklärung:** Unter dem Verhältnisse zweier Größen versteht man theils den Unterschied (Differenz), theils auch das Maß (Quotient), welches bei ihrer Vergleichung in Betracht kommt. Die erste Art des Verhältnisses zweier Größen a und b heißt ihr arithmetisches Verhältniß und wird bezeichnet durch $a - b$. Die zweite Art ist ihr geometrisches Verhältniß, bezeichnet durch $a : b$ (gelesen „a verhält sich zu b"). In den beiden Verhältnissen $a - b$ und $a : b$ heißt a Antecedent oder Factor, b Consequent und diejenige Größe, welche mit dem Consequenten eines geometrischen Verhältnisses multiplicirt den Antecedenten gibt, Exponent des Verhältnisses. Bei den arithmetischen Verhältnissen heißt diejenige Größe, welche um den Consequenten vermehrt den Antecendenten gibt, Differenz.

5) **Lehrsatz:** Ein Verhältniß wird vergrößert oder verkleinert, je nachdem der Antecedent sich vergrößert oder verkleinert, oder aber der Consequent sich verkleinert oder vergrößert.

6) **Lehrsatz:** Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses wird vergrößert oder verkleinert, je nachdem der Antecedent mit einer Zahl, welche die Einheit übersteigt, multiplicirt oder dividirt, oder aber der Consequent dividirt oder multiplicirt wird.

Der Exponent bleibt ungeändert, wenn Antecedent und Consequent beide mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden.

7) **Lehrsatz:** Ein geometrisches Verhältniß bleibt bei Addition oder Subtraction einer und derselben Zahl

zum oder vom Antecedenten und Consequenten in dem Falle ungeändert, wenn der Consequent dem Antecedenten gleich ist.

14) Ist $a : b = e$, so ist

$$b : a = 1 : e,$$
$$(a \pm b) : b = e \pm 1,$$
$$(a \pm b) : a = (e \pm 1) : e,$$
$$a : (a \pm b) = e : (e \pm 1),$$
$$b : (a \pm b) = 1 : (e \pm 1),$$
$$(a + b) : (a - b) = (e + 1) : (e - 1),$$
$$(ma \pm nb) : (pa \pm qb) = (me \pm n) : (pe \pm q).$$

Beweise leicht.

§. 32.

Proportionen.

Unter einer Proportion versteht man die Verbindung zweier Verhältnisse von denselben Exponenten durch das Gleichheitszeichen.

Nach der Art der Verhältnisse unterscheidet man arithmetische und geometrische Proportionen. (Differenz- und Quotientengleichungen.)

In einer arithmetischen Proportion müssen sämmtliche Glieder gleichartige Größen sein. In einer geometrischen Proportion können die Glieder des einen Verhältnisses von der Art der Glieder des anderen verschieden sein.

Die Antecedenten, beziehungsweise die Consequenten der beiden Verhältnisse einer Proportion heißen homologe Glieder. Der Consequent des ersten Verhältnisses nebst dem Antecedenten des zweiten heißen innere, die übrigen äußere Glieder. Sind die inneren Glieder gleich, so ist die Proportion eine stetige; z. B.

$$a - b = b - c,$$
$$a : b = b : c.$$

2) Lehrsatz: Eine geometrische Proportion bleibt richtig, wenn man die Antecedenten, beziehungsweise die Consequenten ihrer beiden Verhältnisse mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt; ist also

$$a : b = c : d,$$
so ist auch $ma : b = mc : d$,
und $a : nb = c : nd$.

4) Lehrsatz: In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren Glieder gleich.

Voraussetzung: $a : b = c : d$ (Quotientengleichung.)
Behauptung: $ad = bc$ (Productengleichung.)
Beweis: Wenn man den Exponenten der gleichen Verhältnisse mit e bezeichnet, so ist

$$a : b = e, \quad a = be.$$
$$c : d = e, \quad de = c.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen, so erhält man

$$ade = bce,$$

oder

$$ad = bc.$$

5) Lehrsatz: Eine geometrische Proportion ist eine richtige, wenn das Product der beiden inneren Glieder dem der beiden äußeren gleich ist.

Zusatz: Ist die Proportion stetig, z. B. $a : b = b : c$, so heißt b mittlere geometrische Proportionale von a und c und es ist $b = \sqrt{ac}$.

8) Lehrsatz: In einer jeden Proportion können unbeschadet der Richtigkeit die mittleren oder auch die äußeren Glieder gegen einander versetzt werden.

Voraussetzung: $m : n = p : q$.
Behauptung:

$$m : p = n : q,$$
$$n : m = q : p,$$
$$n : q = m : p,$$
$$p : m = q : n,$$
$$p : q = m : n,$$
$$q : n = p : m,$$
$$q : p = n : m.$$

Beweis: Die Productengleichungen sind sämmtlich $mq = pn$.

12) Lehrsatz: In jeder (geometrischen) Proportion verhält sich die Summe (oder Differenz) des Antecedenten und Consequenten des ersten Verhältnisses zum Antecedenten oder Consequenten, wie die Summe (oder Differenz) der analogen Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem Antecedenten oder Consequenten desselben.

Voraussetzung: $a : b = c : d = e$.
Behauptung: $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$.
$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$.

Beweis: Es ist

$$\left.\begin{aligned}(a \pm b) : a &= (e \pm 1) : e\\ (c \pm d) : c &= (e \pm 1) : e\end{aligned}\right\} \text{nach §. 31. 14),}$$

mithin

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c.$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}(a \pm b) : b &= (e \pm 1) : 1\\ (c \pm d) : d &= (e \pm 1) : 1\end{aligned}\right\} \text{nach §. 31. 14),}$$

folglich

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

Lehrsatz: In jeder Proportion verhält sich die Summe (oder Differenz) der Antecedenten zur Summe (oder Differenz) der Consequenten, wie einer der Antecedenten zu seinem Consequenten.

Voraussetzung: $a : b = c : d$.

Behauptung: $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d$.

Beweis: Aus dem vorhergehenden Lehrsatze folgt

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b,$$

und gemäß 8)

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d.$$

13) Lehrsatz: In jeder Proportion verhält sich eine beliebige algebraische Verbindung der Glieder des ersten Verhältnisses zu einer anderen Verbindung derselben Glieder, wie die beiden analogen Verbindungen des anderen Verhältnisses zu einander sich verhalten.

Voraussetzung: $a : b = c : d$.

Behauptung: $(ma \pm nb) : (pa \pm qb) = (mc \pm nd) : (pc \pm qd)$.

Beweis: Gemäß 2) ist

$$ma : nb = mc : nd,$$

und

$$pa : qb = pc : qd.$$

Mit Anwendung von §. 31. 14) erhält man weiter

$$(ma \pm nb) : ma = (mc \pm nd) : mc,$$

oder

$$(ma \pm nb) : a = (mc \pm nd) : c.$$

Analog ist

$$(pa \pm qb) : a = (pc \pm qd) : c.$$

Dividirt man beide Gleichungen durcheinander, so ist

$$(ma \pm nb) : (pa \pm qb) = (mc \pm nd) : (pc \pm qd).$$

15) Lehrsatz: Jedes innere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividirt durch das andere innere; und

jedes äußere Glied ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividirt durch das andere äußere.

Beweis nach 4).

28) Lehrsatz: Aus zweien oder mehreren Proportionen können durch Multiplication oder Division der homologen Glieder neue gültige Proportionen gebildet werden.

Voraussetzung: I. $a : b = c : d = e$.
II. $m : n = p : q = e$.

Behauptung: $am : bn = cp : dq$.
$an : bm = cq : dp$.

Beweis: Gemäß 2) folgt aus I.

$$am : bn = cm : dn,$$

und aus II.

$$cm : dn = cp : dq,$$

woraus folgt

$$am : bn = cp : dq.$$

Ferner folgt aus II.

$$\text{III. } n : m = q : p,$$

also gemäß 2) aus I.

$$an : bm = cn : dm,$$

und aus III.

$$cn : dm = cq : dp,$$

woraus folgt

$$an : bm = cq : dp.$$

Anwendung: Ist I. $A : B = m : n$,
II. $B : C = n : o$,
III. $C : D = o : p$ u. s. w.,
so erhält man durch Multiplication von I. und II.

$$A : C = m : o$$

von I., II. und III.

$$A : D = m : p, \text{ u. s. w.}$$

30) Erklärung: Wenn $M : N = aceg : bdfh$, so ist das Verhältniß $M : N$ zusammengesetzt aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, $g : h$.

Es ist nämlich

$$\frac{M}{N} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}.$$

32) Erklärung: Ist eine Proportion aus einer geraden Anzahl, aber mehr als vier Gliedern zusammengesetzt, so nennt man sie fortlaufend und es müssen sich irgend zwei Glieder des einen Verhältnisses zu einander verhalten, wie die homologen Glieder des anderen.

Regel: Sollen mehrere Proportionen in eine fortlaufende verwandelt werden, so suche man erst das Verhältniß von a zu den übrigen b, c, d u. s. w. Nachdem man die Verhältnisse auf gleiche Benennung gebracht hat, ist es leicht, die fortlaufende Proportion zu bilden. Es sei

$$a : b = m : n,$$
$$b : c = p : q,$$
$$c : d = r : s,$$

so ist weiter

$$a : b = m : n = mpr : npr,$$
$$a : c = mp : nq = mpr : nqr,$$
$$a : d = mpr : nqs = mpr : nqs,$$

und

$$a : b : c : d = mpr : npr : nqr : nqs.$$

36) Lehrsatz: In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich eine beliebige algebraische Verbindung des ersten Antecedenten mit seinen Consequenten zu irgend welchen derselben wie dieselbe algebraische Verbindung des anderen Antecedenten mit seinen Consequenten zu den homologen Consequenten.

Voraussetzung: $x : y : z : u = p : q : r : s$.

Behauptung: I. $(x \pm y \pm z \pm u) : x : y : z : u = (p \pm q \pm r \pm s) : p : q : r : s$.

II. $(ax \pm by \pm cz \pm du) : x : y : z : u = (ap \pm bq \pm cr \pm ds) : p : q : r : s$.

Beweis: Gemäß 13) ist

$$(ax \pm by) : y = (ap \pm bq) : q,$$

und

$$(ax \pm by) : z = (ap \pm bq) : r.$$

Hieraus folgt weiter

$$(ax \pm by \pm cz) : z = (ap \pm bq \pm cr) : r,$$

und

$$(ax \pm by \pm cz) : u = (ap \pm bq \pm cr) : s.$$

Folglich

$$(ax \pm by \pm cz \pm du) : u = (ap \pm bq \pm cr \pm ds) : s$$

u. s. w.

§. 33 a.

Anwendung der Proportionslehre.

(Gerades und umgekehrtes Verhältniß. Einfaches, zusammengesetztes, quadratisches, cubisches Verhältniß. Kettenregel. Gesellschafts- und Mischungsrechnung.)

1) Erklärung: Die Größen A und B sind mit den Größen a und b gerade proportionirt, wenn

$$A : B = a : b,$$

hingegen umgekehrt proportionirt, wenn

$$A : B = b : a.$$

Beispiel: Der Lohn L eines Arbeiters verhält sich zu dem Lohn L' eines anderen in derselben Zeit umgekehrt wie die Zeiten, welche sie auf die gleiche Arbeit verwenden.

2) Die Größen A und B stehen mit den Größen a und b im quadratischen Verhältnisse, wenn sie sich zu einander verhalten wie das durch Zusammensetzung zweier gleicher Verhältnisse $a : b$ und $a : b$ entstandene Verhältniß $a^2 : b^2$; ferner im cubischen, wenn

$$A : B = (a \cdot a \cdot a) : (b \cdot b \cdot b) = a^3 : b^3.$$

41) Die Aufgabe liefert ein Beispiel zusammengesetzter Verhältnisse. Wenn statt der Zahlen 735, 10, 21, 140, $7\frac{1}{2}$, 546,

15, 25, 324, 182, $8\frac{1}{3}$, 8, 9 bezüglich die allgemeinen Zeichen $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n$ gesetzt werden, so ist

$$\frac{x}{a} = \frac{b \cdot c \cdot l \cdot m \cdot i \cdot k}{g \cdot h \cdot e \cdot n \cdot f \cdot d}$$

Auflösung: 1) Die Länge des Canals ist bei einem gleichen Aufwande von Kraft und Zeit der Tiefe umgekehrt proportional.

2) Die Länge des Canals ist unter sonst gleichen Umständen der Breite umgekehrt proportional.

3) Die Länge des Canals ist der Anzahl der Arbeiter direct proportional.

4) Die Länge des Canals ist der Dauer der Arbeit direct proportional.

5) Die Länge des Canals ist der täglichen Arbeitszeit direct proportional.

6) Die Länge des Canals ist dem Fleiße der Arbeiter direct proportional.

51) Kettenregel: Diese ist eine besondere Form des zusammengesetzten Verhältnisses. Werden die Zahlen 139, 15, 16, 28, 27, 139, 140 durch die allgemeinen Zeichen a, b, c, d, e, f, g ersetzt, so setze man

$$\begin{array}{rcl} x \text{ pr. F.} & = & 139 \text{ par. F.} \\ 15 & = & 16' \text{ engl.} \\ 28 & = & 27' \text{ österr.} \\ 139 & = & 140' \text{ pr.} \\ \hline 15 \cdot 28 \cdot 139 \cdot x & = & 139 \cdot 16 \cdot 27 \cdot 140 \\ \hline x & = & \dfrac{139 \cdot 16 \cdot 27 \cdot 140}{15 \cdot 28 \cdot 139} \text{ pr. Fuß.} \end{array}$$

oder $b \cdot d \cdot f \cdot x = a \cdot c \cdot e \cdot g$,

$$\frac{x}{g} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}.$$

59) Regel für die Mischungsrechnung: Die einzelnen Bestandtheile der Mischung verhalten sich zur Summe der Bestandtheile wie die bezüglichen Verhältnißzahlen zur Summe derselben.

63) Regel für die Gesellschaftsrechnung: Die einzelnen partes der Theilhaber eines Geschäfts verhalten sich zu der zu vertheilenden Summe, wie die bezüglichen Verhältnißzahlen zur ganzen Summe derselben.

§. 33 b.

Wiederholungsbeispiele.

49) Ist n eine beliebige ganze Zahl, so ist jedes der Producte $n(n + 1)(n + 2)$ und $n(n + 1)(2n + 1)$ durch 6 theilbar.

Beweis: Da unter drei aufeinander folgenden Zahlen n, $n + 1$, $n + 2$, stets wenigstens eine gerade und eine durch 3 theilbare Zahl enthalten ist, so ist das Product $n(n + 1)(n + 2)$ immer durch 6 theilbar.

Da ferner immer eine der Zahlen n, $n + 1$, $2(n + 2)$ durch 3 theilbar sein wird, so muß, wenn n und $n + 1$ keine Vielfache der Zahl 3 sein sollten, doch die um 3 verminderte Zahl $2(n + 2)$ also $2n + 1$ es sein. (Vergl. §. 82. 22.)

50) Sind a und b ganze Zahlen, so ist das Product $ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ stets durch 30 theilbar.

Beweis: Sind a und b ungerade, so ist der in dem Ausdrucke enthaltene Factor $(a^2 + b^2)$ gerade, also die Zahl 2 immer ein Factor des Products. Der übrige Theil des Beweises beruht darauf, daß jede durch 3 nicht theilbare Zahl unter der Form $3p \pm 1$ und jede durch 5 nicht theilbare Zahl unter einer der Formen $5p \pm 1$ und $5p \pm 2$ dargestellt werden kann. Sind a und b von der Form $3p \pm 1$, so ist allemal $a^2 - b^2$ durch 3 theilbar. Sind a und b beide zugleich von der Form $5p \pm 1$ oder von $5p \pm 2$, so ist $a^2 - b^2$ durch 5 theilbar. Ist dagegen eine der Zahlen von der Form $5p \pm 1$, die andere $5p \pm 2$, so ist allemal $a^2 + b^2$ durch 5 ohne Rest theilbar.

51) Vorbereitung: Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

Lehrsatz: Ungleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert, mit Gleichem multiplicirt oder dividirt, gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Voraussetzung: $a < b$,
$m = n$.

Behauptung: I. $a + m < b + n$,
II. $a - m < b - n$,
III. $a \cdot m < b \cdot n$,
IV. $a : m < b : n$.

Beweis: Es sei $b = a + x$ u. s. w.

Lehrsatz: Gleiches um Ungleiches vermindert oder durch Ungleiches dividirt, gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Voraussetzung: $a = b,$
$m > n.$
Behauptung: I. $a - m < b - n,$
II. $a : m < b : n.$

Lehrsatz: Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addirt oder mit demselben multiplicirt, gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Voraussetzung: $a < b,$
$m < n.$
Behauptung: I. $a + m < b + n,$
II. $a \cdot m < b \cdot n.$

Lehrsatz: Ungleiches um Ungleiches mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen vermindert oder durch dasselbe dividirt, gibt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

Voraussetzung: $a < b,$
$m > n.$
Behauptung: I. $a - m < b - n,$
II. $a : m < b : n.$

Hauptsatz: Die Summe aus dem größten und kleinsten Gliede einer geometrischen Proportion ist größer, als die Summe der beiden anderen Glieder.

Voraussetzung: $x : y = z : u,$
und $x > y > z > u.$
Behauptung: $x + u > y + z.$
Beweis: Aus der Proportion folgt

$$(x - y) : y = (z - u) : u,$$

und wegen $y > u$ die Ungleichung

$$x - y > z - u.$$

Addirt man beiderseits $y + u$, so wird

$$x + u > y + z.$$

52) Lehrsatz: Die mittlere geometrische Proportionale zweier ungleichen Zahlen a und b ist kleiner als die mittlere arithmetische Proportionale dieser Zahlen.

Behauptung: $\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}.$

Erster Beweis: Es ist stets $0 < (a - b)^2$ und wenn man beiderseits $4ab$ addirt

$$4ab < (a + b)^2.$$

Dividirt man durch 4 und zieht die Wurzel aus, so erhält man

$$\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}.$$

Zweiter Beweis: Es sei $a > b$ und $a = b + x$, so ist offenbar

$$4b^2 + 4bx < 4b^2 + 4bx + x^2,$$

$$b(b + x) < \left(\frac{2b + x}{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{b(b + x)} < \frac{2b + x}{2},$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}.$$

55) Die gegebene Proportion gilt für den Fall, daß

$$ad_{,} + a_{,}d = bc_{,} + b_{,}c.$$

Zahlenbeispiele: $\left.\begin{array}{l} 1 : 2 = 3 : 6 \\ 2 : 4 = 4 : 8 \end{array}\right\}$

Andere Beispiele liefert die Gerhard'sche Reihe:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 .....

$$\left.\begin{array}{l} 2 : 3 = 4 : 6 \\ 3 : 5 = 6 : 10 \end{array}\right\}$$

56) Die Glieder der entstehenden Reihen haben abwechselnde Vorzeichen. Ordnet man die Reihen nach fallenden Potenzen der Hauptgröße x, so ist die Summe der Elemente a, b, c .... gleich dem Coefficienten des zweiten Gliedes, die Summe aller möglichen Amben der Elemente gleich dem Coefficienten des dritten Gliedes, die Summe aller möglichen Ternen der Elemente gleich dem Coefficienten des vierten Gliedes u. s. w., endlich das Product aus allen Elementen a, b, c .... gleich dem letzten oder Absolutgliede.

58) Der Name „befreundete Zahlen" oder „Freundschaftszahlen" (numeri amicabiles) soll zuerst von van Schooten dem Jüngeren gebraucht worden sein. Versuche, solche Zahlen zu finden, sind mit verschiedenem glücklichen Erfolge angestellt worden von

1) Michael Stifel (siehe Klügel, Math. Wörterbuch, Band I. pag. 246).
2) van Schooten in Leyden (Exercitationes mathematicae lib. V. sect. 9).
3) G. W. Krafft (Nov. comment. Acad. Petrop. I [1747], II [1751]).
4) L. Euler (Opuscula var. argum. vol. II. Berolini 1750), der 61 Paare angibt.
5) J. Struve in Altona (Eine arithmetische Kleinigkeit. Schulprogramm. Altona 1815).

Eine der ältesten Regeln, solche Zahlenpaare zu finden, welche auch von Hutton in seinem Mathem. Dictionary angeführt wird, ist die von van Schooten nach Descartes Mittheilung angegebene:

Man soll drei Primzahlen wählen von der Form $3 \cdot 2^n - 1$, $6 \cdot 2^n - 1$, $18 \cdot 2^{2n} - 1$. Dann ist die letzte Primzahl mit 2^{n+1} multiplicirt, eine Freundschaftszahl, und die Summe ihrer aliquoten Theile natürlich die andere. Auch kann die zweite dadurch gefunden werden, daß man die beiden ersten Primzahlen mit einander und ihr Product mit 2^{n+1} multiplicirt; also

$$A = 2^{n+1}(18 \cdot 2^{2n} - 1),$$
$$B = 2^{n+1}(3 \cdot 2^n - 1)(6 \cdot 2^n - 1).$$

Diese Cartesische Regel gibt für $n = 1$ das erste von Stifel gefundene Freundschaftspaar, nämlich 220 und 284. Die Theiler (aliquoten Theile) der ersten Zahl sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, deren Summe 284 ausmacht; und „erumb" die Theiler von 284 sind 1, 2, 4, 71, 142, deren Summe 220 beträgt.

Für $n = 2$, werden keine Freundschaftszahlen erhalten, weil $18 \cdot 2^4 - 1 = 287$ keine Primzahl ist.

Für $n = 3$ erhält man das erste Beispiel von van Schooten, nämlich 18416 und 17296.

$n = 4$ und $n = 5$ liefern wieder keine Primzahlen, hingegen $n = 6$ gibt das dritte Paar 9437056 und 9363584.

Für $n = 7$ bis $n = 17$ incl. erhält man keine Freundschaftspaare und auch nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit nicht, wenn für n größere Zahlen gesetzt werden.

Die Richtigkeit der Regel ergibt sich aus dem Fundamentalgesetze, wonach die Anzahl der Theiler einer Zahl und die Summe dieser Theiler gefunden wird. Sind nämlich a, b, c .... die Primfactoren einer Zahl $N = a^n \cdot b^p \cdot c^q \ldots$, so wird offenbar die Anzahl ihrer Theiler incl. der Einheit durch das Product

$$(1 + a + a^2 + \ldots a^n)(1 + b + b^2 + \ldots + b^p)$$
$$(1 + c + c^2 + \ldots + c^q) \ldots$$

ausgedrückt, indem die Anzahl der Glieder dieses Productes zugleich die Anzahl aller möglichen Theiler der Zahl ist. Man hat also durch Aufzählung der einzelnen Progressionsglieder $(n + 1)$ $(p + 1)(q + 1) \ldots$ als gesuchte Anzahl der Factoren von N. Die Summe aller Factoren oder das Product selbst wird nach Summirung der einzelnen Klammern mit Anwendung von §. 25. 33) a)

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{p+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{q+1} - 1}{c - 1} \ldots$$

oder, wenn $n = p = q = \ldots = 1$ ist,

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \ldots$$

Hiernach werden alle Theiler des Ausdruckes $2^{n+1}(18 \cdot 2^{2n} - 1)$ die Summe

$$18 \cdot 2^{2n} \frac{2^{n+2} - 1}{2 - 1} = 18\,(2^{3n+2} - 2^{2n})$$

geben. Da aber die Zahl selbst als Theiler nicht mitzählt, so ist sie wieder von dem erhaltenen Ausdrucke zu subtrahiren, wonach die Summe der Theiler gleich wird:

$$(18 \cdot 2^{3n+2} - 18 \cdot 2^{2n}) - (18 \cdot 2^{3n+1} - 2^{n+1})$$
$$= 18(2^{3n+1} - 2^{2n}) + 2^{n+1}.$$

Die andere Zahl würde aber gefunden werden gleich

$$2^{n+1}(3 \cdot 2^{n} - 1)(6 \cdot 2^{n} - 1) = 18(2^{3n+1} - 2^{2n}) + 2^{n+1}$$

in Uebereinstimmung mit dem Vorigen.

Da es bei diesen Aufgaben der unbestimmten Analytik (§. 77) am Ende immer nur auf Versuche ankommt, so schreibt Struve mit Recht an die Spitze seiner kleinen Schrift: „Befreundete sind selten, unter Zahlen wie unter den Menschen.“

Eine verwandte Aufgabe ist die Aufsuchung der sogenannten „vollkommenen Zahlen“ (numeri perfecti), d. i. solcher Zahlen, welche selbst gleich der Summe ihrer Theiler sind, z. B. $6 = 1 + 2 + 3$.

59) Die Regel ist bereits oben in §. 28 Zusatz II. angegeben. Es soll dieselbe hier nachträglich bewiesen werden.

Sei a die Zahl der Einer, b die der Zehner, c die der Hunderte u. s. w., so ist die ganze Zahl z gleich der Summe

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^{2} + d \cdot 10^{3} + \ldots.$$

Nun läßt 1 bei der Division durch 7 den Rest 1,
10 „ „ „ „ „ „ „ 3,
10^2 „ „ „ „ „ „ „ 2,
10^3 „ „ „ „ „ „ „ -1, u. s. w.

Allgemein läßt

10^{6n} den Rest $+1$,
10^{1+6n} „ $+3$,
10^{2+6n} „ $+2$,
10^{3+6n} „ -1,
10^{4+6n} „ -3,
10^{5+6n} „ -2,

folglich läßt die Zahl z denselben Rest, welchen die Reihe

$$a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + \ldots.$$

bei der Theilung durch 7 übrig läßt. Ist also die algebraische Summe dieser Producte durch 7 ohne Rest theilbar, so ist es auch die gegebene Zahl.

Dritter Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

A. Potenzen mit ganzen Exponenten.

§. 34.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

1) **Lehrsatz:** Statt zwei Potenzen von gleichen Basen mit einander zu multipliciren, kann man auch die Exponenten zu einander addiren.

Beweis: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m)},$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(n)}.$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit Anwendung von §. 15, so erhält man

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m+n)} = a^{m+n}.$$

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl mit einer Summe zu potenziren, kann man die Zahl mit jedem einzelnen Summanden potenziren und dann diese Potenzen multipliciren. (Umkehrung von 1.)

§. 35.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ oder } 1 : a^{n-m}, \text{ je nachdem } m \gtrless n.$$

1) **Lehrsatz:** Statt zwei Potenzen von gleichen Basen durch einander zu dividiren, kann man die Zahl mit der Differenz der beiden Exponenten potenziren.

Beweis: Es ist $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m)},$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(n)}.$

Der Quotient beider Gleichungen ist

$$a^m : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m-n)} = a^{m-n},$$

$$\text{oder } = 1 : \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{n-m}\right) = 1 : a^{n-m}.$$

2) Lehrsatz: Statt eine Zahl mit einer Differenz zu potenziren, kann man auch die Zahl mit jedem Gliede der Differenz potenziren und darauf die Potenzen dividiren. (Umkehrung von 1.)

16) Die Lehrsätze sind bereits oben (§. 25. 14) angeführt.

§. 36.

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m.$$

1) Lehrsatz: Statt zwei Potenzen von gleichen Exponenten mit einander zu multipliciren, kann man das Product der Basen zur gemeinschaftlichen Potenz erheben.

Beweis: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m)},$

$b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{(m)}.$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots\ldots (a \cdot b)}_{(m)} = (a \cdot b)^m.$$

2) Lehrsatz: Statt ein Product mit einer Zahl zu potenziren, kann man jeden einzelnen Factor mit der Zahl potenziren. (Umkehrung von 1.)

§. 37.

$$\text{I.} \quad a^m : b^m = (a : b)^m.$$
$$\text{II.} \quad 1 : b^x = (1 : b)^x.$$

1) Lehrsatz: Statt Potenzen von gleichen Exponenten durch einander zu dividiren, kann man auch die Basen durcheinander dividiren. (Formel I.)

Beweis: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{(m)},$

$b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{(m)}.$

Dividirt man beide Gleichungen, so erhält man nach §. 24. II.

$$a^m : b^m = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots \frac{a}{b}}_{(m)},$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

2) Lehrsatz: Statt einen Quotienten mit einer Zahl zu potenziren, kann man auch Dividend und Divisor potenziren. (Umkehrung von Formel I.)

3) Lehrsatz: Der reciproke Werth der Potenz einer Zahl ist gleich derselben Potenz des reciproken Werthes der Zahl. (Formel II.)

Beweis: Multiplicirt man beiderseits mit b^x, also

$$1 : b^x \cdot b^x = (1 : b)^x \cdot b^x,$$

so erhält man

$$1 = (1 : b \cdot b)^x = 1 \text{ nach §. 17. I. und §. 36.}$$

4) Lehrsatz: Die Potenz des reciproken Werthes einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe derselben Potenz der Zahl. (Umkehrung von Formel II.)

§. 38.

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x.$$

1) Lehrsatz: Statt eine Potenz mit einer Zahl zu potenziren, kann man den Exponenten mit der Zahl multipliciren.

Behauptung: $(a^x)^y = a^{xy}$.

Beweis: $(a^x)^y = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot a^x \ldots\ldots a^x}_{(y)}$

$$= a^{\overbrace{x + x + x + \ldots\ldots + x}^{(y)}} = a^{xy} \text{ nach §. 34.}$$

Lehrsatz: Statt eine Zahl mit einem Producte zu potenziren, kann man die Zahl mit den einzelnen Factoren nacheinander potenziren in beliebiger Reihenfolge. (Umkehrung von 1.)

Behauptung: $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$.

Beweis: $a^{xy} = a^{yx}$,

$$\underbrace{a^x \cdot a^x \cdot a^x \ldots\ldots a^x}_{(y)} = \underbrace{a^y \cdot a^y \cdot a^y \ldots\ldots a^y}_{(x)},$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x.$$

§. 39.

Potenz mit der Basis 1, mit dem Exponenten 0, der Basis 0, mit negativem Exponenten und mit negativer Basis.

I. $1^m = 1$. II. $a^0 = 1$. III. $0^a = 0$. IV. 0^0 ist unbestimmt.

Lehrsatz: Jede Potenz mit der Basis 1 und mit endlichem Exponenten ist gleich 1.

Zusatz: Ist $m = \infty$, so kann 1^m ein unbestimmter Ausdruck sein. Dann setzt man $1 = a^{p-p} = a^0$, so wird $1^m = (a^0)^\infty = a^{0 \cdot \infty}$, welcher Ausdruck einen von 1 verschiedenen Werth annimmt, wenn $0 \cdot \infty$ endlich ist.

Lehrsatz: Jede Potenz mit dem Exponenten 0 und mit endlicher Basis ist gleich 1.

Beweis wie im vorhergehenden Zusatz.

Zusatz: Ist $a = 0$, so nimmt die Potenz den unbestimmten Ausdruck 0^0 an. Z. B. $(a^{c/x})^x$ behält offenbar für alle Werthe von a und x den Werth a^c. Ist $a < 1$ und $x = 0$, so wird an dieser Gränze

$$a^{c/x} = 0 \text{ und } 0^0 = a^c.$$

Lehrsatz: Jede Potenz mit der Basis 0 und endlichem Exponenten ist gleich Null.

Zusatz: Für $a = 0$ findet die im vorigen Lehrsatz erwähnte Ausnahme Statt.

Lehrsatz: Jede Potenz mit negativem Exponenten ist dem reciproken Werthe derselben Potenz mit positivem Exponenten, oder dem reciproken Werthe der Basis, potenzirt mit positivem Exponenten, gleich.

Behauptung: $a^{-x} = 1 : a^x = (1 : a)^x$.

Beweis: Es ist $a^{-x} = a^{0-x} = a^0 : a^x$ nach §. 35,

also $a^{-x} = 1 : a^x = (1 : a)^x$ nach §. 37. II.

§. 40.

Potenzirung einer Summe oder einer Differenz. Binomial-Coefficienten-Tafel.

Die folgende Tafel, welche die Entwicklung der Coefficienten der Potenzen von a und b bei der Potenzirung des Binoms $a \pm b$ darstellt, heißt nach seinem Erfinder Pascal (1623—1662) das arithmetische oder Pascal'sche Dreieck. Verschiedene Eigenschaften desselben sind durch Zeichen angedeutet. Die voranstehende Zahlenreihe bezeichnet die Exponenten des Binoms.

0. 1

I. 1 1

II. 1 2 1

III. 1 3 3 1

IV. $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1 = 70$

V. 1 5 10 10 5 1

VI. 1 6 15 20 15 6 1

VII. 1 7 21 35 35 21 7 1

VIII. $1 \pm 8 + 28 \pm 56 + 70 \pm 56 + 28 \pm 8 + 1 = \begin{cases} 2^8 \\ 0 \end{cases}$

IX. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

X. 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

3) Die Potenz-Exponenten von a fallen, die von b steigen.

$$(a + b)^n = a^n + m_1 a^{n-1} b + m_2 a^{n-2} b^2 + m_3 a^{n-3} b^3 + \ldots$$

4) **Lehrsatz:** Der $r$te und $(r + 1)$te Coefficient der $n$ten Potenz eines Binoms betragen zusammen den $(r+1)$ten Coefficienten der nächstfolgenden $(n + 1)$ten Potenz; z. B.:

$$15 + 20 = 35.$$

Lehrsatz: Sämmtliche $r$te Coefficienten aller vorhergehenden Potenzen betragen zusammen den $(r + 1)$ten Coefficienten der nächstfolgenden Potenz. Z. B.:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35.$$

Lehrsatz: Die Summe der Quadrate der Coefficienten der $n$ten Potenz ist gleich dem mittleren Coefficienten der $2n$ten Potenz. Z. B.:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70.$$

Lehrsatz: Schreibt man die Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz unter ebenso viele beliebige aufeinander folgende Coefficienten der $n$ten Ordnung und multiplicirt paarweise, so ist die Summe dieser Producte mit abwechselnden Vorzeichen gleich Null. Z. B.:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & -\,40 & +\,120 & -\,140 & +\,56 = 0. \end{array}$$

B. Wurzeln.

§. 41.

Begriff der Wurzeln.

$$\text{I. } \sqrt[x]{a^x} = a. \quad \text{II. } \left(\sqrt[x]{a}\right)^x = a.$$

Definition: Unter der $x$ten Wurzel einer Zahl a versteht man diejenige Größe, welche zur $x$ten Potenz erhoben, die Zahl a ergibt. (Formel II.)

Lehrsatz: Jede Zahl ist gleich der $x$ten Wurzel der $x$ten Potenz derselben Zahl. (Formel I.)

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit x, so erhält man mit Anwendung von II. die identische Gleichung

$$a^x = a^x.$$

1) Es sei $m^x = p$ (Potenz),

so ist $m = \sqrt[x]{p}$ (Wurzel),

und $x = \log^m p$ (Logarithmus),

$p = m^x$ (numerus logarithmi).

Die Potenzen unterscheiden sich von den Summen und Producten wesentlich dadurch, daß die Basis und der Exponent sich nicht vertauschen lassen. Daher läßt sich der Exponent einer Potenz aus der Potenz und Basis nicht auf dieselbe Art finden, wie die Basis aus der Potenz und dem Exponenten. Darum hat die Potenzrechnung auch zwei umgekehrte Rechnungen, die Wurzel- und Logarithmenrechnung, während die Addition und die Multiplication jede nur eine umgekehrte Rechnung hat. Der numerus logarithmi führt vom Logarithmus zur Potenz zurück.

§. 42.

$$\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b}.$$

1) Lehrsatz: Statt die $x$te Wurzel aus einem Product zu ziehen, kann man die einzelnen Factoren radiciren.

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit x, also

$$\left(\sqrt[x]{ab}\right) = \left(\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b}\right)^x,$$

so erhält man

$$ab = \left(\sqrt[x]{a}\right)^x \cdot \left(\sqrt[x]{b}\right)^x \text{ nach §. 36,}$$

$$ab = a \cdot b \text{ nach §. 41 II.}$$

2) Lehrsatz: Statt Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten zu multipliciren, kann man die Radicanden multipliciren. (Umkehrung von 1.)

§. 43.

$$\text{I. } \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \cdot \quad \text{II. } \sqrt[n]{1:a} = 1 : \sqrt[n]{a}.$$

1) Lehrsatz: Die $n$te Wurzel aus dem Quotienten zweier Zahlen ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzeln der Zahlen. (Formel I.)

Beweis: Erhebt man beiderseits zur $n$ten Potenz, so erhält man mit Anwendung von §. 37 I. die identische Gleichung

$$a : b = a : b.$$

2) Lehrsatz: Der Quotient der $n$ten Wurzeln zweier Zahlen ist gleich der $n$ten Wurzel aus den Quotienten der beiden Zahlen. (Umkehrung von I.)

3) Lehrsatz: Die $n$te Wurzel aus dem reciproken Werthe einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe der $n$ten Wurzel aus der Zahl. (Formel II.)

Beweis wie in 1).

Lehrsatz: Der reciproke Werth der $n$ten Wurzel einer Zahl ist gleich der $n$ten Wurzel aus dem reciproken Werthe der Zahl. (Umkehrung von II.)

§. 44.

$$\text{I.} \quad \sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x:m]{a^{y:m}}.$$

$$\text{II.} \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{y:x} = \sqrt[x:y]{a}.$$

1) Lehrsatz: Die $x$te Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man den Wurzel- und den Potenz-Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. (Formel I.)

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit xn, so erhält man

$$\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^{xn} = a^{yn} \text{ nach §. 41. II.}$$

und $$\left[\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^x\right]^n = (a^y)^n = a^{yn} \text{ nach §. 41. II und §. 38.}$$

Den zweiten Theil des Satzes beweist man leicht durch Anwendung des ersten, indem man den Wurzel- und Potenz-Exponenten mit m multiplicirt.

19) Lehrsatz: Statt die $x$te Wurzel aus einer Potenz zu ziehen, kann man den Wurzel-Exponenten in den Potenz-Exponenten oder den Potenz-Exponenten in den Wurzel-Exponenten dividiren. (Formel II.)

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit x, also

$$\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^x = (a^{y:x})^x;$$

so erhält man

$$a^y = a^y \text{ nach §. 41 II und §. 38.}$$

Den zweiten Theil des Satzes, nämlich

$$a^{y:x} = \sqrt[x:y]{a}$$

kann man dadurch beweisen, daß man beiderseits mit $x : y$ potenzirt, also

$$\left(a^{y:x}\right)^{x:y} = \left(\sqrt[x:y]{a}\right)^{x:y}.$$

Hieraus folgt

$$a = a \text{ nach §. 38 und §. 41 II.}$$

§. 45.

$$\sqrt[x]{a^y} = \left(\sqrt[x]{a}\right)^y.$$

1) Lehrsatz: Statt die $x$te Wurzel aus einer Potenz zu ziehen, kann man auch erst die $x$te Wurzel aus der Basis ziehen.

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit x, also

$$\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^x = \left(\sqrt[x]{a}\right)^{yx},$$

so erhält man

$$a^y = \left(\sqrt[x]{a}\right)^{xy} = a^y \text{ nach §. 41. II. und §. 38.}$$

2) Lehrsatz: Statt die $x$te Wurzel einer Zahl zu potenziren, kann man auch erst die Zahl potenziren. (Umkehrung von 1.)

§. 46.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

1) Lehrsatz: Statt die $n$te Wurzel aus der $n$ten Wurzel einer Zahl zu ziehen, kann man die Wurzel-Exponenten miteinander multipliciren.

Behauptung: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Beweis: Potenzirt man beiderseits mit mn, also

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn},$$

so erhält man

$a = a$ nach §. 38 und §. 41 II.

2) **Lehrsatz:** Statt eine Zahl durch ein Product mn zu radiciren, kann man die Zahl durch die einzelnen Factoren radiciren in beliebiger Reihenfolge. (Umkehrung von 1).

§. 47.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

1) **Lehrsatz:** Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten entsteht, wenn eine Potenz radicirt wird, wobei der Radicand-Exponent kein Factor des Potenz-Exponenten ist.

2) **Lehrsatz:** Eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten entsteht, wenn eine Wurzel potenzirt wird, wobei der Potenz-Exponent kein Factor des Radicand-Exponenten ist.

3) **Lehrsatz:** Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist gleich einer Wurzelpotenz, deren Potenz-Exponent gleich dem Zähler und deren Wurzel-Exponent gleich dem Nenner des Bruches ist.

4) **Lehrsatz:** Eine Potenz oder Wurzel mit gebrochenem negativen Exponenten ist gleich dem reciproken Werthe derselben mit positivem Exponenten.

5) **Lehrsatz:** Die für Potenzen und Wurzeln mit ganzen Potenz- oder Wurzel-Exponenten bewiesenen Sätze gelten sämmtlich für Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

Der Beweis dieser Sätze besteht darin, daß man den gebrochenen Potenzen die Wurzelform gibt, darauf die Formeln der Wurzelrechnung anwendet und die neuen Wurzelausdrücke auf die Potenzform bringt.

$$\text{I. } (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}.$$

$$\text{II. } (a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}.$$

$$\text{III. } a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

$$\text{IV. } a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = 1 : \left(a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}\right).$$

$$\text{V. } \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

§. 48.

Ueber das Vorzeichen der Wurzel.

I. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{b^2 - 2ba + a^2} = \pm (a - b)$.

II. $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$
III. $\sqrt[2n+1]{-a} = - a^{\frac{1}{2n+1}}$
wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

IV. $\sqrt[2n]{-a}$ = unmöglich oder imaginär.

Lehrsatz: Eine gerade Wurzel einer positiven Zahl hat mindestens zwei angebbare Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen und gleicher absoluter Größe. (Formel I und II.)

Lehrsatz: Jede ungerade Wurzel einer negativen Zahl hat nur eine und zwar negative angebbare (reelle) Wurzel. (Formel III.)

Lehrsatz: Jede gerade Wurzel einer negativen Zahl ist unmöglich (imaginär), da weder im positiven noch im negativen Zahlengebiete sich solche Zahlen angeben lassen, deren gerade Potenz negativ wäre.

§. 49.

Rechnung mit imaginären Größen.

I. $(\sqrt{-a})^2 = -a$. II. $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$.

III. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. IV. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b}$.

V. $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} \cdot \sqrt{-1}$. VI. $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = -\sqrt{a:b} \cdot \sqrt{-1}$.

Vorbemerkung: Die Einheit der imaginären Größen ist $\sqrt{-1}$ und wird auch mit i bezeichnet.

Beweise für die obigen Formeln:

ad I. Die Richtigkeit der Formel folgt einfach aus dem Begriffe der Wurzel oder aus §. 41. II.

ad II. Es ist $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. nach §. 42.

ad III. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab}$ $(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$.

ad IV. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) : (\sqrt{b} . \sqrt{-1}) = \sqrt{ab}$.

ad V. $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} \cdot \sqrt{-1}$.

ad VI. $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a} : (\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = -\sqrt{a}(\sqrt{-1})^2 :$ $(\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = -\sqrt{a:b} \cdot \sqrt{-1}$.

Erklärung: Die aus reellen (positiven und negativen) Zahlen zusammengesetzten zweigliedrigen Ausdrücke heißen complexe oder laterale*) Größen.

Das sinnlich Wahrnehmbare unterscheidet sich nach Inhalt und Form. Die äußeren Formen der Endlichkeit sind die Zeit, die Zahl, der Raum. Die Zeit hat eine Dimension, die Zahl zwei, der Raum drei.

Demnach hat das Zahlengebiet zwei Hauptrichtungen oder Coordinaten-Axen, die reelle und die imaginäre. Um die Einheit der imaginären Zahlen zu erhalten, denke man sich zunächst durch Drehung der reellen Axe um den Nullpunct (Pol) die (+ 1) in die (— 1) gebracht, so wird durch eine abermalige gleich große Drehung in derselben Richtung die (+ 1) in die ursprüngliche Lage zurückkehren. Sei der Drehungsfactor gleich F, so ist

$$F \times (+1) = -1,$$
$$F \times (-1) = +1,$$

folglich

$$F^2 = +1,$$
$$F = \pm 1.$$

Sei ferner f der Drehungsfactor für einen Quadranten, so ist

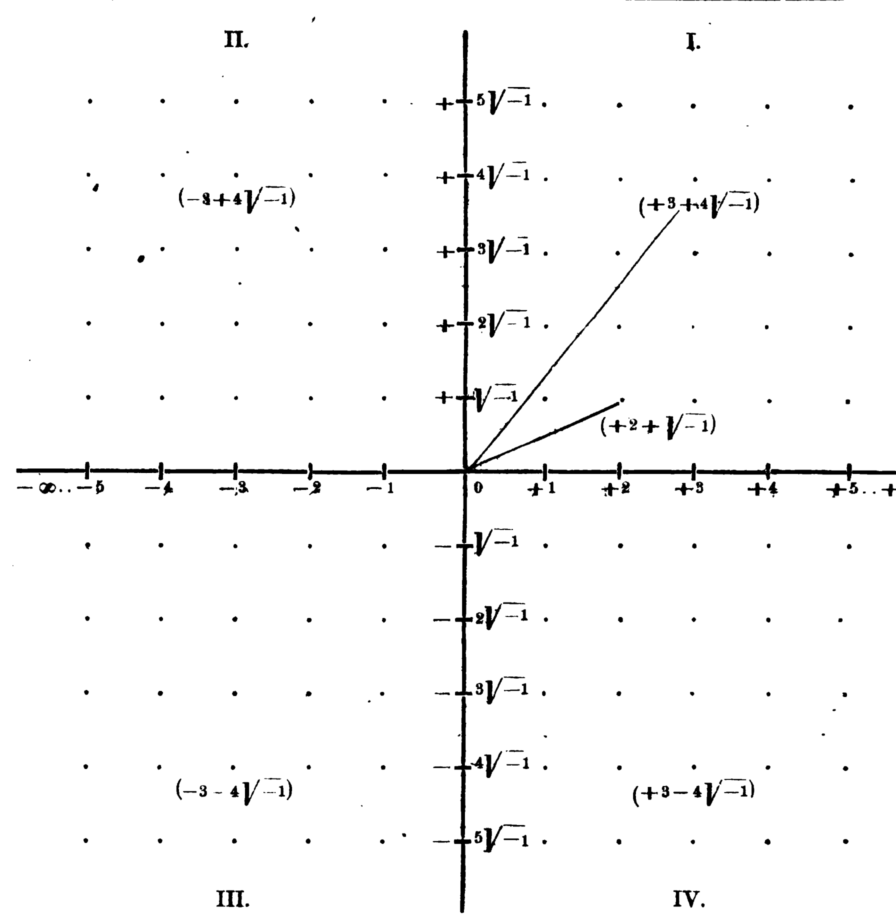
$$f \times (+1) = i,$$
$$f \times (i) = -1,$$

folglich

$$f^2 = -1,$$
$$f = \pm\sqrt{-1}.$$

Hiernach nimmt nun das Zahlengebiet folgende Form an:

*) Diese Zahlen sind von Cauchy „complexe", von Gauß (Gött. gelehrte Anz. 1831) „laterale", von Mourey „nombres directives" (Richtungszahlen) genannt. Ein kurzgefaßtes Referat über die Literatur der geometrischen Deutung der imaginären Zahlen gibt Riecke, „Die Rechnung mit Richtungszahlen." Stuttgart (1856) Anhang.



Man erkennt leicht in dieser Anordnung, daß die lateralen Zahlen die vier Quadranten der Zahlenebene erfüllen. Ferner leuchtet ein, daß gemäß der Bedeutung des Drehungsfactors Potenzirung der complexen und reellen Zahlen gleichbedeutend ist mit Drehung ihres rad. vect. um den Nullpunct. Z. B. ist $(-\sqrt{-1})^2 = -1$. Nun ist die Zahl $-\sqrt{-1}$ um drei Quadranten von der Axe der positiven reellen Zahlen entfernt, ihr Quadrat aber um sechs Quadranten; ihr Cubus $(-\sqrt{-1})^3 = +\sqrt{-1}$ um neun Quadranten. Das Quadrat der complexen Zahl $(+2+\sqrt{-1})$ nämlich $(+2+\sqrt{-1})^2 = 3+4\sqrt{-1}$ liegt in einem rad. vect., welcher den doppelten Winkelabstand von der Axe der positiven reellen Zahlen hat. Dasselbe folgt aus der Moivre'schen Formel:

$$\left\{r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\sqrt{-1}\right)\right\}^2 = r^2\cos 2\varphi + r^2\sin 2\varphi\cdot\sqrt{-1},$$
allgemein
$$\left(r\cos\varphi + r\sin\varphi\sqrt{-1}\right)^n = r^n\cos n\varphi + r^n\sin n\varphi\cdot\sqrt{-1}\text{ *)}$$
In dem vorerwähnten Beispiele sei $2 = r\cos\varphi$, $1 = r\sin\varphi$, so ist offenbar
$$r^2 = r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = 5.$$
Nun ist der reelle Theil des Quadrats, nämlich
$$r^2\cos 2\varphi = r^2(2\cos\varphi^2 - 1) = 8 - 5 = 3,$$
der imaginäre Theil
$$r^2\sin 2\varphi\sqrt{-1} = 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{-1} =$$
$$2\cdot 2\cdot\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1},$$
mithin das Quadrat $+3+4\sqrt{-1}$. Endlich ist der rad. vect. der complexen Zahl $\left(+2+\sqrt{-1}\right)$ gleich $\sqrt{5}$, der seines Quadrates gleich 5, wie das Schema ebenfalls zeigt.

C. Wurzeln aus gemeinen Zahlen und algebraischen Summen.

§. 50.

Quadratwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = a \pm b$.

II. $\sqrt{a^2 \pm k} = a \pm \frac{k}{2a}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

1) Lehrsatz. Das Quadrat einer $n$zifferigen Zahl hat entweder $2n$ oder $2n-1$ Ziffern.

Beweis: Sei N eine $n$zifferige Zahl, so ist
$$10^{n-1} \gtreqless N < 10^n,$$
$$10^{2n-2} \gtreqless N^2 < 10^{2n}.$$
Nun ist 10^{2n-2} die kleinste $2n-1$zifferige, 10^{2n} die kleinste $2n+1$zifferige Zahl, folglich kann N^2 nur $2n-1$ oder $2n$zifferig sein.

2) Lehrsatz: Die dritte Potenz einer $n$zifferigen Zahl hat mindestens $3n-2$, höchstens $3n$ Ziffern.

3) Lehrsatz: Die zweite Wurzel einer $2n$zifferigen Zahl hat n Ziffern, die einer $2n+1$zifferigen Zahl $n+1$ Ziffern.

7) Regel: Jede Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, wird von der Rechten zur Linken in zweizifferige Klassen abgetheilt. Bei Decimalbrüchen geschieht dies vom Komma aus nach rechts und links.

*) Man vergleiche Heis' Trigonometrie VIII. 101 und flg.

8) Das Ausziehen der Wurzel geschieht nach der Formel

$$(a + b + c + d + \ldots\ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)\,c + c^2 + 2(a + b + c)\,d + d^2 + \ldots\ldots$$

Beispiel: $4321 = 4000 + 300 + 20 + 1 = a + b + c + d$.

$$\begin{aligned} a^2 &= 16000000 \\ 2ab &= 2400000 \\ b^2 &= 90000 \\ 2(a + b)\,c &= 172000 \\ c^2 &= 400 \\ 2(a + b + c)\,d &= 8640 \\ d^2 &= 1 \\ \hline (a + b + c + d)^2 &= 18671041 \end{aligned}$$

Umkehrung in die Quadratwurzel:

$$\sqrt{18 \mid 67 \mid 10 \mid 41} = 4321$$

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 \\ 2 \cdot 4 &= 8 : 26 \\ 8 \cdot 3 &= 24 \\ & \quad 27 \\ 3^2 &= 9 \\ 2 \cdot 43 &= 86 : 181 \\ 86 \cdot 2 &= 172 \\ & \quad 90 \\ 2^2 &= 4 \\ 2 \cdot 432 &= 864 : 864 \\ 864 \cdot 1 &= 864 \\ & \quad 1 \\ 1^2 &= 1 \end{aligned}$$

§. 51.

Quadratwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

Anleitung: Man ordne die einzelnen Ausdrücke nach Potenzen der Hauptgrößen und verfahre eben so wie bei gemeinen Zahlen.

§. 52.

Kubikwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b.$

II. $\sqrt[3]{a^3 \pm k} = a \pm \frac{k}{3a^2}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

4) Regel: Jede Zahl, aus welcher die Kubikwurzel gezogen werden soll, wird von rechts nach links in dreizifferige Klassen abgetheilt.

5) Das Ausziehen der Kubikwurzel geschieht nach der Formel

$$\begin{aligned}(a + b + c + d + \ldots.)^3 = a^3 & \\ & + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ & + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \\ & + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Beispiel: $248 = 200 + 40 + 8 = a + b + c.$

$$\begin{aligned} a^3 &= 8000000 \\ 3a^2b &= 4800000 \\ 3ab^2 &= 960000 \\ b^3 &= 64000 \\ 3(a+b)^2c &= 1382400 \\ 3(a+b)c^2 &= 46080 \\ c^3 &= 512 \\ \hline (a+b+c)^3 &= 15252992. \end{aligned}$$

Umkehrung in die Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{15 \mid 252 \mid 992} = 248$$

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ 3 \cdot 2^2 &= 12 : 72 \\ 12 \cdot 4 &= 48 \\ & \quad 245 \\ 3 \cdot 2 \cdot 4^2 &= 96 \\ & \quad 1492 \\ 4^3 &= 64 \\ 3 \cdot 24^2 &= 1728 : 14289 \\ 1728 \cdot 8 &= 13824 \\ & \quad 4659 \\ 3 \cdot 24 \cdot 8^2 &= 4608 \\ & \quad 512 \\ 8^3 &= 512 \end{aligned}$$

§. 53.

Kubikwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

Anleitung: Man ordne die Glieder der Ausdrücke nach Potenzen der Hauptgrößen und verfahre eben so wie bei gemeinen Zahlen.

§. 54.

Ausziehen höherer Wurzeln aus gemeinen Zahlen und aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

1) Lehrsatz: Die $n$te Potenz einer $x$zifferigen Zahl hat $nx - n + 1$ bis nx Ziffern.

Beweis: Sei N eine $x$zifferige Zahl, so ist

$$10^{x-1} \overline{\gtrless} N < 10^{x},$$
$$10^{nx-n} \overline{\gtrless} N^{n} < 10^{nx}.$$

Nun ist 10^{nx-n} die kleinste $nx-n+1$zifferige, 10^{nx} die kleinste $nx+1$zifferige Zahl, folglich kann N^n $nx-n+1$= bis nxzifferig sein.

9) Lehrsatz: Die vierte Wurzel einer $4n$zifferigen Zahl hat n Ziffern, die einer $4n+1$, $4n+2$ und $4n+3$ zifferigen Zahl $n+1$ Ziffern.

10) Lehrsatz: Die $x$te Wurzel einer xnzifferigen Zahl hat n Ziffern, die einer $xn+1$, $xn+2$, ... $xn+n-1$zifferigen Zahl aber $n+1$ Ziffern.

11) Regel: Jede Zahl, aus welcher die $x$te Wurzel gezogen werden soll, wird von der Rechten zur Linken in $x$zifferige Klassen abgetheilt.

12) Das Ausziehen der vierten Wurzel geschieht nach der Formel

$$(a + b + c + d + \ldots)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4(a+b)^3c + 6(a+b)^2c^2 + 4(a+b)c^3 + c^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 55.

Verwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel und umgekehrt.

$$\text{I. } \sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b}}.$$

$$\text{II. } \sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}.$$

Beweis für I: Es sei

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x \pm \sqrt{y}},$$

wo x eine rationale, $\sqrt{y}$ eine irrationale Zahl bezeichnet. Quadrirt man die Gleichung, so erhält man

$$2a \pm 2\sqrt{a^2-b} = x \pm \sqrt{y}.$$

Jetzt setze man die rationalen, beziehungsweise die irrationalen Theile der Binome einander gleich, also

$$x = 2a, \sqrt{y} = 2\sqrt{a^2-b}.$$

Beweis für II: Dieser ergibt sich leicht aus Formel I, indem man $2a = m$, $2\sqrt{a^2-b} = \sqrt{n}$ setzt.

9) Lehrsatz: Die Summe der Wurzeln zweier conjugirter complexer Zahlen $m+\sqrt{-n}$ und $m-\sqrt{-n}$ ist stets reell, die Differenz imaginär.

Bemerkung. Dieser Satz gilt von allen Functionen complexer Größen überhaupt, z. B. von $(m+\sqrt{-n})^3$ ist das Real

$$\tfrac{1}{2}(m+\sqrt{-n})^3 + \tfrac{1}{2}(m-\sqrt{-n})^3 = m^3 - 3mn,$$

das Lateral

$$\tfrac{1}{2}(m+\sqrt{-n})^3 - \tfrac{1}{2}(m-\sqrt{-n})^3 = (3m^2-n)\sqrt{-n}.$$

D. Logarithmen.

§. 56.

Begriff eines Logarithmus.

Einleitung: Geht man aus von der Exponentialgleichung

$$m^x = p,$$

so erkennt man leicht, daß die Potenz zwei umgekehrte Rechnungen hat, indem sich m durch x und p und auch noch x durch m und p ausdrücken läßt. (Vergleiche §. 41. 1). Die erste Operation wird durch die Gleichung

$$\sqrt[x]{p} = m$$

dargestellt. Im zweiten Falle soll diejenige Zahl x gesucht werden, zu deren Potenz eine gegebene Basis m erhoben werden muß, damit die Zahl p herauskommt. Dies kann nicht durch die Wurzelrechnung gefunden werden. Die Aufgabe erfordert also eine neue Operation. Man nennt den gesuchten Exponenten x den Logarithmus der Zahl p zur Basis m und bezeichnet ihn durch

$$x = \overset{m}{log}\, p.$$

p heißt **Logarithmand.** Die Logarithmenrechnung hat ebenfalls eine umgekehrte Rechnung, indem man aus einer gegebenen Basis und einem gegebenen Logarithmus x wieder die Zahl (numerus) p finden kann. Wir wollen sie das **Numeriren** nennen und bezeichnen durch

$$p = num \overset{m}{log}\, x.$$

An die vier **Grundoperationen**

Addiren — Subtrahiren
Multipliciren — Dividiren

reihen sich somit vier **Rangoperationen**

Potenziren — Radiciren
Logarithmiren — Numeriren.

Anmerkung. Erfinder der sogenannten hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen ist John Neper (geb. 1550). (Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614. 4.) Erfinder der künstlichen Logarithmen ist sein Freund und Zeitgenosse Henry Briggs (geb. 1556) in London. Dieser schrieb: Logarithmorum chilias prima, 1618 (auf 8 Decimalen berechnet). Darauf Arithmetica logarithmica. London 1620 (erste vollständige Tafeln der gemeinen Logarithmen der Zahlen 1 bis 20000 und 90000 bis 100000, auf 14 Decimalen berechnet).

$$\text{I. } b^{\overset{b}{\log} n} = n. \quad \text{II. } \overset{b}{log}\,(b^x) = x. \quad \text{III. } \overset{b}{log}\, b = 1.$$

1) **Definition:** Der Logarithmus einer Zahl n zur Basis b ist diejenige Zahl, zu deren Potenz b erhoben werden muß, damit n herauskommt. (Formel I.)

Beweis von Formel II: Potenzirt man die Basis b mit den beiden Seiten der Gleichung, also

$$b^{\overset{b}{\log}(b^x)} = b^x,$$

so erhält man

$$b^x = b^x \text{ nach §. 56. I.}$$

Die Gleichung II. ist übrigens nur eine andere Form, die Definition des Begriffs „Logarithmus" auszudrücken.

ad III. Die Gleichung $\overset{b}{log}\, b = 1$ ist nur ein specieller Fall der Formel II, nachdem $x = 1$ gesetzt ist.

34) Alle zu einer und derselben Basis gehörigen Logarithmen bilden ein **Logarithmensystem.** Alle Systeme, deren Grundzahlen von der Zahl $e = 2{,}718281828459 \ldots.$ verschieden sind, werden **künstliche** genannt.

35) Man hat zu prüfen, welche Zahlen sich zur Basis eines Logarithmensystems eignen und welche nicht. Man findet für

a) $m > 1$ und $x = -\infty$, $p = 0$.
$-\infty < x < 0$, $0 < p < 1$.
$x = 0$, $p = 1$.
$0 < x < +\infty$, $1 < p < +\infty$.
$x = +\infty$, $p = +\infty$.

b) $0 < m < 1$ und $x = -\infty$, $p = +\infty$.
$-\infty < x < 0$, $+\infty > p > 1$.
$x = 0$, $p = 1$.
$0 < x < +\infty$, $1 > p > 0$.
$x = +\infty$, $p = 0$.

Hieraus folgt, daß für eine positive von der Einheit verschiedene Basis nur die positiven Zahlen einen Logarithmus haben können.

36) bis 40) Man findet für

a) $m = 1$ und p (endlich), $x = \infty$ oder unmöglich.

b) $0 > m > -\infty$ und p (endlich), x bald reell, bald complex.

Hieraus folgt, daß weder die Einheit, noch eine negative Zahl sich zur Basis eines Logarithmensystems eignen, und daß negative Zahlen keinen Logarithmus haben, wenn die Basis positiv ist.

41) Ist 10 die Basis, so wird der Logarithmus mit $\overset{10}{log}\, p$ oder $log\ vulg.\ p$ oder kurz $log\ p$ bezeichnet.

Er wird auch wohl gemeiner oder nach dem Erfinder Brigg'scher Logarithmus genannt.

Ist die Basis eine Zahl e, welche man aus der §. 30 Nr. 27 angegebenen, ins Unendliche fortgehenden Reihe erhält, wenn in derselben $x = 1$ gesetzt wird, und welche gleich 2,718281828459 ... ist, so heißt der Logarithmus ein natürlicher oder hyperbolischer.

Statt $\overset{e}{log}\, p$ schreibt man $log\ nat.\ p$ oder auch $l\, p$.

Um denselben zu entwickeln, geht man aus von der Exponentialreihe

$$(1+z)^x = 1 + \frac{x}{1} z + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \ldots \text{(§. 92)},$$

indem man die Reihe nach Potenzen von x ordnet, also unter der Form

$$(1+z)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots.$$

Man sieht leicht, daß man erhält

$$(1 + z)^x = 1 + \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\right) x + \ldots\ldots,$$

also

$$A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots$$

Man nennt A den **Modulus** der Reihe.

Um die anderen Coefficienten zu finden, entwickle man die Gleichung

$$(1 + z)^x \cdot (1 + z)^y = (1 + z)^{x+y}.$$

$$\text{I.}\ (1+z)^x \cdot (1+z)^y = (1 + Ax + Bx^2 + \ldots)(1 + Ay + By^2 + \ldots)$$
$$= 1 + A \cdot (x + y) + B \cdot (x^2 + y^2) + C \cdot (x^3 + y^3) + \ldots$$
$$+ A^2 \cdot xy + AB \cdot (x + y)xy + AC \cdot (x^2 + y^2)xy + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + AL \cdot (x^{k-2} + y^{k-2})xy + \ldots$$

$$\text{II.}\ (1 + z)^{x+y} =$$
$$1 + A \cdot (x + y) + B \cdot (x^2 + y^2) + C \cdot (x^3 + y^3) + \ldots$$
$$+ 2B \cdot xy + 3C \cdot (x + y)xy + 4D \cdot (x^2 + y^2)xy + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + kM \cdot (x^{k-2} + y^{k-2})xy + \ldots$$

Durch Gleichsetzung der homologen Coefficienten erhält man weiter

$$2B = A^2, \text{ und } B = \frac{A^2}{1 \cdot 2},$$

$$3C = AB, \qquad C = \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$4D = AC, \qquad D = \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

allgemein

$$kM = AL, \qquad M = \frac{Ak}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

Demgemäß ist

$$(1 + z)^x = 1 + \frac{A}{1} \cdot x + \frac{A^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots\ldots$$

Man nehme nun an $A = 1$ und $1 + z = e$, so wird

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots \text{ (vergl. §. 30 Nr. 27).}$$

Diese einfache Reihe läßt also für die Basis e und einen gegebenen Exponenten (Logarithmus) x den zugehörigen Numerus p

finden, woraus sich das natürliche Logarithmensystem ergibt. Die Zahl e selbst findet man offenbar, wenn man in der obigen Reihe $x = 1$ annimmt. Statt indessen die Tafeln so zu berechnen, wie es auch ein Deutscher Namens Just Byrg oder Jobst Bürgi (geb. 1552) in seinen arithmetischen und geometrischen Progreß-Tabulen (Prag 1620) ähnlich versuchte, ist es einfacher, zu einem gegebenen Numerus p den zugehörigen Logarithmus x zu berechnen. Dies geschieht auf folgende Art.

Es sei die beliebige positive Zahl $1 + z$ die $m$te Potenz von e, also

$$1 + z = e^m \text{ und } log\ nat\,(1 + z) = m,$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$(1 + z)^x = (e^m)^x = e^{mx} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

$$(1 + z)^x = 1 + l(1 + z) \cdot \frac{x}{1} + \left[l(1 + z)\right]^2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$

$$+ \left[l(1 + z)\right]^3 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots$$

Es ist aber auch

$$(1 + z)^x = 1 + A \cdot \frac{x}{1} + A^2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + A^3 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

folglich

$$\text{I. } log\ nat\,(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$$\text{II. } log\ nat\,(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$log\ nat\,(1 + z) - log\ nat\,(1 - z) =$$

$$\text{III. } log\ nat\,\frac{1 + z}{1 - z} = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right]$$

mit Anwendung von §. 57. II.

Setzt man noch

$$\frac{1 + z}{1 - z} = y, \text{ also } z = \frac{y - 1}{y + 1},$$

so erhält man die Logarithmengleichung

$$\text{IV. } log\ nat\,y = 2\left[\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

$$\ldots\Big) = 0{,}6931472\ldots$$

... gedacht werden
... der Exponent zwi-
... alle

... Logarithmen-
... der gegebe-
... welche der

... die Kenn-
... Decimalbruch

... ist
... Factoren.

... ist
... vermindert
... II.)

Beweis: Führt man dieselben Größen ein, wie in I, so ist

$$log\,(a : b) = log\,(m^{p-q}) = p - q = log\, a - log\, b.$$

Lehrsatz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Product aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis. (Formel III.)

Beweis: Setzt man in dem Beweise für I

$$b = c = d = \ldots\ldots = a,$$

so wird

$$log\,(a^n) = log\, a + log\, a + \ldots + \underset{(n)}{log\, a} = n\, log\, a.$$

Lehrsatz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Basis dividirt durch den Exponenten. (Formel IV.)

Beweis: Sei wiederum m die Basis des Systems und

$$\sqrt[n]{a} = m^x, \text{ so ist } a = m^{nx}$$

$$log\, a = nx,\ log\, \sqrt[n]{a} = x,$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Formel V zu beweisen: Potenzirt man die Basis n mit den beiden Seiten der Gleichung, also

$$n^{\overset{x}{\log}\, a\, \cdot\, \overset{n}{\log}\, x} = n^{\overset{n}{\log}\, a},$$

so erhält man

$$\left(n^{\overset{n}{\log}\, x}\right)^{\overset{x}{\log}\, a} = a \text{ nach §. 38 und §. 56 I.}$$

$$x^{\overset{x}{\log}\, a} = a \text{ nach §. 56 I.}$$

$$a = a \text{ nach §. 56 I.}$$

Lehrsatz: Der x-Logarithmus der Zahl y ist gleich dem reciproken Werthe des y-Logarithmus von x. (Formel VI.)

Beweis: Potenzirt man die Basis x mit den beiden Seiten der Gleichung, also

$$x^{\overset{x}{\log}\, y\, \cdot\, \overset{y}{\log}\, x} = x^1,$$

so erhält man

$$\left(x^{\overset{y}{\log}\, x}\right)^{\overset{x}{\log}\, y} = x^1 \text{ nach §. 38,}$$

$$y^{\overset{x}{\log}\, y} = x \text{ nach §. 56 I,}$$

$$x = x \text{ nach §. 56 I.}$$

Beispiel: $y = 2$.

$$log\ nat\ 2 = 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \ldots\right) = 0{,}6931472\ldots$$

42) Da jede $n$zifferige Zahl p entstanden gedacht werden kann durch Potenzirung der Zahl 10, wobei der Exponent zwischen $n - 1$ und n liegt, also

$$10^{n-1} < p < 10^n,$$

so ist 10 die bequemste Basis für die gemeine Logarithmenrechnung. Die um 1 verminderte Anzahl der Ziffern der gegebenen Zahl gibt nämlich unmittelbar die Ganzen an, welche der Logarithmus der $n$zifferigen Zahl enthält.

45) Die ganzen Einheiten des Logarithmus machen die Kennziffer oder Charakteristik aus; den übrigen Decimalbruch nennt man Mantisse.

§. 57.

Logarithmische Sätze.

I. $log\,(a \cdot b) = log\,a + log\,b$ ·
II. $log\,(a : b) = log\,a - log\,b$ ·
III. $log\,(a^n) = n\,log\,a$ ·
IV. $log\,\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\,log\,a$ ·

(I.–IV.) für jede beliebige Basis.

V. $\overset{x}{log}\,a \cdot \overset{n}{log}\,x = \overset{n}{log}\,a$. VI. $\overset{x}{log}\,y \cdot \overset{y}{log}\,x = 1$.

Lehrsatz: Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren. (Formel I.)

Behauptung: $log\,(a \cdot b) = log\,a + log\,b$,
allgemein $log\,(a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots) = log\,a + log\,b + log\,c + \ldots$

Beweis: Sei m die Basis des Systems und

$$a = m^p,\ b = m^q,\ c = m^r \text{ u. s. w.},$$

so ist

$$p = log\,a,\ q = log\,b,\ r = log\,c \text{ u. s. w.}$$

und

$$log\,(a \cdot b \cdot c \ldots) = log\,(m^{p+q+r+\ldots})$$
$$= p + q + r + \ldots = log\,a + log\,b + log\,c + \ldots$$

Lehrsatz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividenden vermindert um den Logarithmus des Divisors. (Formel II.)

Beweis: Führt man dieselben Größen ein, wie in I, so ist

$$log\,(a:b) = log\,(m^{p-q}) = p - q = log\,a - log\,b.$$

Lehrsatz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Product aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis. (Formel III.)

Beweis: Setzt man in dem Beweise für I

$$b = c = d = \ldots\ldots = a,$$

so wird

$$log\,(a^n) = log\,a + log\,a + \ldots + \underset{(n)}{log\,a} = n\,log\,a.$$

Lehrsatz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Basis dividirt durch den Exponenten. (Formel IV.)

Beweis: Sei wiederum m die Basis des Systems und

$$\sqrt[n]{a} = m^x, \text{ so ist } a = m^{nx}$$

$$log\,a = nx,\ log\sqrt[n]{a} = x,$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Formel V zu beweisen: Potenzirt man die Basis n mit den beiden Seiten der Gleichung, also

$$n^{\overset{x}{\log} a\,.\,\overset{n}{\log} x} = n^{\overset{n}{\log} a},$$

so erhält man

$$\left(n^{\overset{n}{\log} x}\right)^{\overset{x}{\log} a} = a \text{ nach §. 38 und §. 56 I.}$$

$$x^{\overset{x}{\log} a} = a \text{ nach §. 56 I.}$$

$$a = a \text{ nach §. 56 I.}$$

Lehrsatz: Der x-Logarithmus der Zahl y ist gleich dem reciproken Werthe des y-Logarithmus von x. (Formel VI.)

Beweis: Potenzirt man die Basis x mit den beiden Seiten der Gleichung, also

$$x^{\overset{x}{\log} y\,.\,\overset{y}{\log} x} = x^1,$$

so erhält man

$$\left(x^{\overset{y}{\log} x}\right)^{\overset{x}{\log} y} = x^1 \text{ nach §. 38,}$$

$$y^{\overset{x}{\log} y} = x \text{ nach §. 56 I,}$$

$$x = x \text{ nach §. 56 I.}$$

61) Hier beginnt die achte Operation, die Bestimmung des Numerus logarithmi.

73 α) Nach Formel V ist

$$\overset{e}{\log}\, a \cdot \overset{10}{\log}\, e = \overset{10}{\log}\, a.$$

β) Nach Formel VI ist

$$\overset{10}{\log}\, a = \overset{e}{\log}\, a \cdot \overset{10}{\log}\, e = \overset{e}{\log}\, a \cdot \frac{1}{\overset{e}{\log}\, 10}.$$

74) Aus 73 β) folgt, daß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl durch $\overset{e}{\log}\, 10$ dividiren muß, um den Brigg'schen zu erhalten. Nun ist aber

$$\overset{e}{\log}\, 10 = 2{,}30258509 \ldots.$$

folglich $\overset{10}{\log}\, e = 0{,}43429448 \ldots.$ (Modulus des Brigg'schen Systems).

Nach 73 α) erhält man die Brigg'schen Logarithmen der Zahlen, wenn man die Neper'schen mit dem Modulus des Brigg'schen Systems multiplicirt.

§. 58.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

Hierzu empfehlen wir

1) fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Herausgegeben von Dr. O. Schloemilch. Braunschweig 1866.
2) Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch (mit siebenstelligen Logarithmen) von Vega. Bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin 1862. 46. Auflage.

§. 59 a.

A. Berechnung gegebener Zahlenausdrücke mit Hülfe der Logarithmen.

Anleitung: Man suche die Aufgabe mit Anwendung der Formeln in §. 57 zu lösen.

B. Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen der Zahlen nach den Gauß'schen Tabellen.

$$\text{I. } log\,(a + b) = log\,a + log\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

$$\text{II. } log\,(a - b) = log\,a - log\,\frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = log\,a + log\left(1 - \frac{b}{a}\right).$$

45) Aufgabe: $log\,(a + b)$ zu berechnen.

Auflösung nach Formel I: Die Tabellen enthalten zu dem Argumente $log\,\frac{b}{a}$, wo $a > b$, den Werth von $log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$.

Trigonometrische Auflösung: (Heis' Trig. II. 30—32).

Man setze $\frac{b}{a} = tan\,\alpha^2$, so wird

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + tan\,\alpha^2 = sec\,\alpha^2,$$

also

$$log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 2 log\,sec\,\alpha = -\,2 log\,cos\,\alpha.$$

Es läßt sich mithin durch $log\,tan\,\alpha = \frac{1}{2}\,log\left(\frac{b}{a}\right)$ der Winkel α bestimmen; und es ist $log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ der doppelten Ergänzung des $log\,cos\,\alpha$ zu 10 gleich.

63) Aufgabe: $log\,(a - b)$ zu berechnen.

Auflösung nach Formel II. Die Tabellen enthalten zu dem Argumente $log\,\frac{b}{a}$ den Werth von $log\,\frac{1}{1 - \frac{b}{a}}$.

Trigonometrische Auflösung: Man setze $\frac{b}{a} = sin\,\gamma^2$, also $log\,sin\,\gamma = \frac{1}{2}\,log\,\frac{b}{a}$. Dann wird

$$1 - \frac{b}{a} = cos\,\gamma^2,\; log\left(1 - \frac{b}{a}\right) = 2\,log\,cos\,\gamma.$$

§. 59 b.

Wiederholungsbeispiele.

38) Es soll bewiesen werden, daß, wenn a, b und c ungleich und positiv sind, stets sei

$$abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Erster Beweis: Sei a die kleinste Zahl und $a = b - x = c - y$, so ist

$$abc = a(a+x)(a+y) = a^3 + a^2x + a^2y + axy,$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = (a+x-y)(a+y-x)(a+y+x)$$
$$= a^2(x+y) - a(x-y)^2 + x^2(y-x) - y^2(y-x).$$

Weil nun

$$-a(x^2 - xy + y^2) - (y^2 - x^2)(y-x) = -a\frac{y^3 + x^3}{y+x} - (y^2 - x^2)(y-x)$$

stets negativ ist, so findet die Ungleichung immer Statt.

Zweiter Beweis: Sei $a + b + c = s$, $p = s - 2a$, $a = b + x = c + x + y$, so wird behauptet, daß

$$(p + 2x + y)(p + x + y)(p + x) > (p + 2x + 2y)(p + 2x)p$$

oder

$$px^2 + pxy + py^2 + 2x^3 + 3x^2y + xy^2 > 0,$$

welche Ungleichung immer Statt findet, da p, x, y positive Größen sind.

39) Lehrsatz: Das doppelte Product zweier Zahlen ist immer entweder eben so groß oder kleiner als die Summe ihrer Quadrate.

Erster Beweis: Da Quadrate reeller Zahlen stets positiv sind, so ist

$$(a - b)^2 \geqq 0,$$

also

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0 \text{ und } a^2 + b^2 \geqq 2ab$$ (vergl. §. 33b Nr. 52).

Zweiter Beweis: Es ist

$$ab = a^2 - a(a - b),$$
$$ab = b^2 - b(a - b),$$

folglich

$$2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2.$$

Da nun $(a - b)^2$ positiv ist, so ist

$$2ab \leqq a^2 + b^2.$$

40) Lehrsatz: Die Summe eines Bruches und seines reciproken Werthes ist immer größer als 2.

Beweis: Es ist

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b},$$
$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{a-b}{a},$$

folglich $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 + \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Der Ausdruck zur Rechten ist für positive a und b stets > 2.

41) Es soll bewiesen werden, daß, wenn a, b, c ungleich und positiv sind, stets

$$9(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)^3 > 27\,abc.$$

Beweis: Sei $a > b > c$ und $a - b = x$, $b - c = y$, also

$$a = c + x - y,\ b = c + y,\ \text{so ist}$$
$$9(a^3 + b^3 + c^3) = 9[(c + x + y)^3 + (c + y)^3 + c^3],$$
$$(a + b + c)^3 = [(c + x + y) + (c + y) + c]^3,$$
$$27\,abc = 27(c + x + y)(c + y)\,c.$$

Da x und y positiv sind, so ist die Differenz des ersten und zweiten Ausdrucks

$$18c(x^2 + xy + y^2) + (8x^3 + 21x^2y + 15xy^2 + 10y^3) > 0,$$

die Differenz des zweiten und dritten Ausdruckes

$$9c\,\frac{x^2}{4} + (x + 2y)^3 > 0.$$

42 α) Jede Primzahl über 3 hat die Form $2n + 1$, also ist das um 1 verminderte Quadrat gleich $4(n^2 + n)$, d. h. durch 4 theilbar. Ferner hat jede Primzahl über 3 entweder die Form $3m + 1$ oder $3m + 2$. Die um 1 verminderten Quadrate dieser Ausdrücke sind $9m^2 + 6m$ und $9m^2 + 6m + 3$, d. h. durch 3 theilbar.

β) $2^x + 2^{x+1} \equiv 0\ (mod\ 6)$.

Beweis: Außer durch 2 ist der Ausdruck auch noch theilbar durch 3. Denn $2^x + 2^{x+1} = 2^x(2 + 1) = 3 \cdot 2^x$.

γ) $(x + y)(x - y)\,xy \equiv 0\ (mod\ 3)$ für ganze x und y.

Beweis: Es sei

a) $x = 3m + 1$, $y = 3n + 1$, so ist $(x - y) \equiv 0\ (mod\ 3)$.

b) $x = 3m + 1$, $y = 3n - 1$, so ist $(x + y) \equiv 0\ (mod\ 3)$.

43) **Lehrsatz:** Wenn a und b relative Primzahlen sind, so können $a^2 - ab + b^2$ und $a + b$ keinen anderen gemeinschaftlichen Primfactor als 3 haben.

Beweis: Es finden zwei Fälle Statt:

a) $a = 2m, \quad b = 2n + 1.$

b) $a = 2m + 1, \ b = 2n + 1.$

a) Wenn a relativ prim b ist, so ist $2n + 1$ nicht durch m theilbar. Dann ist ebenfalls

$$a + b = 2(m + n) + 1.$$

$$a^2 - ab + b^2 = 4m^2 - 4mn + 4n^2 + 2m - 4n + 1.$$

Verfährt man nun wie bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers, so ist

$$4m^2 - 4mn + 4n^2 + 2m - 4n + 1 = (2m + 2n + 1)$$
$$(2n - 4m + 1) + 12m^2.$$

Ist nun der Rest $12m^2$ und der Ausdruck $2m + 2n + 1$ durch irgend einen Factor zugleich theilbar, so ist es der gesuchte gemeinschaftliche Factor. Es besteht aber $12m^2$ aus den Primfactoren 2, 3, m. Nun ist aber 2 nicht der gemeinschaftliche Factor, auch m nicht, also kann es nur 3 sein.

b) Ist $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, so ist

$$a + b = 2(m + n + 1),$$

$$a^2 - ab + b^2 = 4m^2 - 4mn + 4n^2 + 2m + 2n + 1$$
$$= 2(m + n + 1)(2n - 4m - 1) + 3(2m + 1)^2.$$

Der Rest $3(2m + 1)^2$ nun kann mit $2m + 2n + 2$ nur den Factor 3 gemeinschaftlich haben, weil $2m + 1$ relativ prim zu $2n + 1$ ist.

44) **Lehrsatz:** Sind m und n zwei absolute Primzahlen, so gibt es $(m - 1)(n - 1)$ Zahlen, welche kleiner als das Product mn und zu demselben relativ prim sind.

Beweis: Nicht relativ prim sind $m \cdot 1, m \cdot 2, m . 3, \ldots m(n - 1)$ so wie $n \cdot 1, n \cdot 2, n \cdot 3, \ldots. n(m - 1)$. Außerdem die 1 selber. Die erste Anzahl ist $n - 1$, die zweite $m - 1$, die dritte 1. Folglich gibt es

$$mn - (n-1) - (m - 1) - 1 = (m - 1)(n - 1)$$

Zahlen, welche relativ prim mn sind.

50) **Lehrsatz:** Zerlegt man die Zahl $3a$ in drei Summanden, so ist das Product derselben ein Maximum, wenn die Summanden einander gleich sind.

Beweis: Es sei $3a = (a + x) + (a + y) + (a - x - y)$.

Das Product $(a + x)(a + y)(a - x - y) = a^3 - a\frac{x^3 - y^3}{x - y} - xy(x + y)$.

Nun ist $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ stets positiv, folglich das Product ein Maximum für $x = y = 0$.

53) Lehrsatz: Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist kleiner als das arithmetische.

Behauptung: $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$.

Beweis: Nach Nr. 39 ist $2xy < x^2 + y^2$, also auch

$$4xy < x^2 + 2xy + y^2,$$

$$xy < \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4},$$

$$\sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}.$$

Lehrsatz: Die Differenz zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel beträgt weniger, als das Quadrat der Differenz der Zahlen dividirt durch die achtfache kleinere Zahl.

Behauptung: $\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} < \frac{(x - y)^2}{8y}$, wenn $x > y$ ist.

Beweis: Es sei

$$\sqrt{xy} + f = \frac{x + y}{2},$$

also

$$xy + 2f\sqrt{xy} + f^2 = \frac{(x + y)^2}{4},$$

$$2f\sqrt{xy} = \frac{(x - y)^2}{4} - f^2.$$

Substituirt man nun zur Linken statt x die kleinere Zahl y, addirt zur Rechten f^2 und dividirt die Ungleichung durch $2y$, so ist der Satz bewiesen.

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

§. 60.

Begriff und Eintheilung der Gleichungen.

1) Unter Gleichung versteht man die algebraische Form der Gleichsetzung zweier mathematischer Ausdrücke. Diese besteht in der Verbindung der Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen (=).

2) Unter Seiten der Gleichung versteht man dieselben so verbundenen Ausdrücke, so wie unter Glieder die einzelnen beiderseits durch Addition oder Subtraction verbundenen Theile der Seiten.

3) Eine identische Gleichung ist die Gleichsetzung zweier absolut gleicher Größen unter gleicher Form. Eine analytische Gleichung ist eine solche, in welcher eine Seite nur eine durch die arithmetischen oder transcendenten Operationen hergestellte Umformung oder Entwicklung der anderen ist, so daß die Gleichheit der Seiten von den speciellen Zahlenwerthen der Buchstabengrößen unabhängig bleibt.

Beispiele: $a + b = a + b$ (identisch).
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (analytisch algebraisch).
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (analytisch transcendent).

Eine synthetische Gleichung (Bestimmungs- oder Bedingungsgleichung) ist eine solche, in welcher die eine Seite durch Entwicklung der anderen nur dann hergestellt werden kann, wenn einem oder mehreren Gliedern derselben bestimmte Werthe gegeben werden.

Beispiele: Nr. 4 β) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ (synthetisch algebraisch).
$m \sin x + n \cos x = s$ (synthetisch transcendent).

Bemerkung: Gewöhnlich werden identische und analytische Gleichungen nicht streng unterschieden.

5) Bei der Umformung der Gleichungen dürfen nur auf beiden Seiten dieselben Verwandlungen vorgenommen werden. Diese können entweder durch die arithmetischen oder durch die transcendenten (die Kräfte der Algebra übersteigenden) Operationen ausgeführt werden. Die Umformung besteht großentheils in einer Trans-

position von einer Seite zur anderen, wobei man folgende Regeln zu beobachten hat:

a) Alles, was auf der einen Seite Summand ist, wird auf der anderen Subtrahend und umgekehrt.

b) Alles was auf der einen Seite Minuend ist, wird auf der anderen Subtrahend.

c) Alles was auf der einen Seite Factor ist, wird auf der anderen Divisor und umgekehrt.

d) Alles was auf der einen Seite Dividend ist, wird auf der anderen Divisor.

e) Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten mit derselben Zahl potenzirt, radicirt oder für dieselbe Basis logarithmirt.

(Man vergleiche die Formeln, welche in §. 61 Nr. 1 und Nr. 126 vorangestellt sind.)

6) Die oben in Nr. 3 angedeuteten Bestimmungsgrößen der synthetischen Gleichungen heißen Unbekannte. Dieselben werden in der Regel durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet (u, v, w, x, y, z).

Eine Gleichung auflösen heißt: die Umformung derselben dergestalt bewerkstelligen, daß die Unbekannte direct durch eine Verbindung der bekannten Größen ausgedrückt wird. Die Methode der Auflösung besteht darin, daß man diejenigen Werthe für die Unbekannten zu bestimmen sucht, welche der Gleichung genügen oder sie zu einer identischen machen.

Im Allgemeinen sucht man die gegebene Gleichung mit einer Unbekannten x auf die Form

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$$

zu bringen, worin die bestimmten Werthe (Wurzeln) α, β, γ ... die Werthe von x angeben, welche den Ausdruck zu Null machen.

Eine Gleichung in Bezug auf eine in ihr enthaltene Größe auflösen, heißt diese eine Größe als unbekannte, die übrigen als bekannte betrachten und die Gleichung auflösen.

8) Unentwickelte (implicite) Gleichungen sind solche, in welchen die Unbekannten oder Hauptgrößen nicht allein oder gesondert auf der einen Seite stehen. Z. B.:

$$x^3 + ax^2y + axy^2 + y^3 = m.$$

Entwickelte (explicite) sind Gleichungen, welche auf eine solche Form gebracht sind, daß eine der Unbekannten von den übrigen Unbekannten gänzlich abgesondert ist. Z. B.:

$$y + ay = \frac{mz^3 + n}{pz^2 + q}.$$

Eine Gleichung ordnen heißt, die Glieder der Gleichung mittels Transposition, Auflösung von Klammern, Vereinigung von Gliedern mit gleichen Potenzen der Unbekannten u. s. w. so auf einander folgen lassen, daß sie eine Reihe nach fallenden Potenzen der Unbekannten bilde, also auf die Form

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$$

bringen oder wie man sich auch ausdrückt, auf Null reduciren.

Das Ordnen ist bei algebraischen Gleichungen immer möglich. Bei den transcendenten Gleichungen (§. 106) kann dasselbe erst dann geschehen, wenn die transcendenten Ausdrücke in algebraische verwandelt sind, z. B.:

$$x = \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

(Vergl. Heis' Trig. VIII. 121.)

Sind die transcendenten Ausdrücke alle derselben Art, so kann das Ordnen nach den Hauptgrößen vorgenommen werden, z. B. §. 107, 37)

$$\sin 2\varphi + 2m = 2\tan\varphi,$$
$$\sin\varphi^6 + m^2 \sin\varphi^2 - m^2 = 0.$$

9) Nach der Anzahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei oder mehr Unbekannten.

10) Je nachdem eine auf die in 8) angegebene Form reducirte Gleichung die Unbekannte in der ersten, zweiten, ... $n$ten Potenz als der höchsten enthält, wird die Gleichung eine Gleichung vom ersten, zweiten, ... $n$ten Grade genannt. Die Gleichungen des zweiten Grades nennt man auch quadratische, die vom dritten cubische, die vom vierten Grade biquadratische Gleichungen.

A. Gleichungen vom ersten Grade.

§. 61.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

$$\begin{cases} x + a = b, \\ x = b - a. \end{cases} \quad \begin{cases} x - a = b, \\ x = b + a. \end{cases} \quad \begin{cases} a - x = b, \\ x = a - b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot a = b, \\ x = b : a. \end{cases} \quad \begin{cases} x : a = b, \\ x = b \cdot a. \end{cases} \quad \begin{cases} a : x = b, \\ x = a : b. \end{cases}$$

Nr. 126. $\begin{cases} x^m = a, \\ x = \sqrt[m]{a}. \end{cases}$ $\begin{cases} m^x = a, \\ x = \overset{b}{log}\, a : \overset{b}{log}\, m. \end{cases}$

Anleitung: Die Auflösung geschieht durch Anwendung der fünf voranstehenden in 5) §. 60 angedeuteten Veränderungen, oder auch durch Anwendung der alten indischen Methode*) der regula falsi. Die regula falsi, von den Indern erfunden, von den Arabern nachgeahmt, von den lateinischen Uebersetzern numeratio divinationis genannt, ist eine in vielen Fällen höchst praktische Methode, welche von den neueren Algebristen leider nicht genug gewürdigt worden ist. Sie erfordert keine besondere Ordnung der Gleichung, nur darf die Unbekannte nicht in den Divisoren der etwa vorhandenen Quotienten vorkommen. Setzt man in der Gleichung $ax + b = c$ statt x nacheinander die Werthe α und $\alpha_{,}$ ein, so erhält man für $ax + b$ Werthe, die im Allgemeinen von c verschieden sind. Die Unterschiede $c - (a\alpha + b)$ und $c - (\alpha_{,} + b)$, welche man die **Fehler** der Gleichung nennt, seien bezüglich φ und $\varphi_{,}$. Ist nun $\alpha_{,} = \alpha + \delta$, so ist $\varphi_{,} = \varphi - a\delta$. Ist ferner $\alpha + n\delta$ die Substitution, bei welcher der Fehler der Gleichung $\varphi_{,,} = \varphi - na\delta$ gleich Null wird, so ist $n = \frac{\varphi}{a\delta}$ $= \frac{\varphi}{\varphi - \varphi_{,}}$ und also die Wurzel der Gleichung

$$x = \alpha + n\delta = \alpha + \frac{\varphi\delta}{\varphi - \varphi_{,}} = \frac{\alpha_{,}\varphi - \alpha\varphi_{,}}{\varphi - \varphi_{,}}.$$

Zahlenbeispiel: Nr. 75 α) $3 - [\frac{1}{5}(4 + x) - \frac{1}{7}(6 - x)] = \frac{1}{9}(8 + x) - 10.$

Sei $\alpha = 1$, so ist $\varphi = -11\frac{5}{7}$,

$\alpha_{,} = 6, \qquad \varphi_{,} = -9\frac{4}{9}.$

$$x = \frac{6(-11\frac{5}{7}) - 1(-9\frac{4}{9})}{-11\frac{5}{7} - (-9\frac{4}{9})} = 26\frac{115}{143}$$

Nr. 82 α) $(m - x)(n - x) = (p + x)(x - q).$

Sei $\alpha = m$, so ist $\varphi = (p + m)(m - q)$,

$\alpha_{,} = n, \qquad \varphi_{,} = (p + n)(n - q).$

$$x = \frac{n(p + m)(m - q) - m(p + n)(n - q)}{(p + m)(m - q) - (p + n)(n - q)} = \frac{mn + pq}{m + n + p - q}.$$

---

*) Liber augmenti et diminutionis, vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham (ca. 1130) compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit. Libri hist. I, 269. (Vergl. §. 82. 14 β.)

§. 63.

Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

120) Bewegungsaufgaben: Die Auflösung geschieht am einfachsten durch Anwendung der physicalischen Formel $s = v \cdot t$, worin s = spatium, v = velocitas, t = tempus.

§. 65.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Zur Bestimmung von beliebig vielen Unbekannten sind eben so viele von einander unabhängige Gleichungen, d. h. solche nöthig und zugleich hinreichend, bei welchen keine durch Umformung einer der übrigen gebildet werden kann, jedoch auch keine der anderen widersprechen darf.

2) Die Gruppe III. ist zur Bestimmung der Unbekannten nicht hinreichend, weil man die dritte Gleichung durch Addition der beiden anderen erhält. Ebenso widersprechen sich die Gleichungen

$$x + 3y = 15,$$
$$4x + 12y = 21.$$

3) Sind für n Unbekannte n Gleichungen von den erforderlichen Eigenschaften gegeben, so läßt sich jederzeit aus diesen eine einzige Gleichung mit nur einer Unbekannten bilden. Das Verfahren besteht darin, daß man eine der Gleichungen mit allen übrigen verbindet, indem man eine und dieselbe Unbekannte überall eliminirt. Hiedurch erhält man $n - 1$ neue Gleichungen von nur $n - 1$ Unbekannten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zuletzt auf eine einzige Gleichung, welche nur noch eine Unbekannte enthält. Die Elimination von $n - 1$ Unbekannten läßt sich auf verschiedenen Wegen erreichen.

I. Die Substitutionsmethode. Wenn die Größe x eine zweien oder mehreren der gegebenen Gleichungen gemeinsame Unbekannte ist, so löse man eine derselben nach x auf und setze ihren Werth überall für x ein. Eben so verfahre man hierauf mit den übrigen Unbekannten.

Beispiel: Nr. 8. I. $x + ay = b$,
II. $cx + y = d$.

Aus I. erhält man $x = b - ay$. Substituirt man diesen Werth von x in II, so erhält man

$$c(b - ay) + y = d.$$

II. Die Combinationsmethode. Man löse die Gleichungen sämmtlich nach einer der Unbekannten z. B. x auf und setze die so erhaltenen Ausdrücke einander gleich. Auf diese Weise erhält man $n - 1$ neue Gleichungen, welche kein x mehr enthalten.

Beispiel: Nr. 22. I. $mx + ny = p$,
II. $rx + sy = t$.

Aus I. erhält man

$$x = \frac{p - ny}{m},$$

aus II.

$$x = \frac{t - sy}{r}.$$

Setzt man diese Ausdrücke einander gleich, so ist

$$\frac{p - ny}{m} = \frac{t - sy}{r}.$$

III. Die Additions- oder Subtractionsmethode. Man ordne die beiden Gleichungen, aus denen x eliminirt werden soll, und multiplicire entweder nur eine oder beide Gleichungen mit solchen Zahlen, daß die Coefficienten von x in beiden gleich werden. Je nach der Gleichheit oder Ungleichheit der Vorzeichen der Coefficienten kann man durch Subtraction oder Addition der beiden Gleichungen eine neue erhalten, welche keine x mehr enthält.

Beispiel: Nr. 87 a) I. $ax + by + cz = m$,
II. $a_{\prime}x + b_{\prime}y + c_{\prime}z = m_{\prime}$,
III. $a_{\prime\prime}x + b_{\prime\prime}y + c_{\prime\prime}z = m_{\prime\prime}$.

Multiplicirt man I. mit $a_{\prime}$, II. mit a und subtrahirt II. von I., so erhält man

$$\text{IV. } (a_{\prime}b - ab_{\prime})y + (a_{\prime}c - ac_{\prime})z = a_{\prime}m - am_{\prime}.$$

Multiplicirt man II. mit $a_{\prime\prime}$, III. mit $a_{\prime}$ und subtrahirt III. von II., so erhält man

$$\text{V. } (a_{\prime\prime}b_{\prime} - a_{\prime}b_{\prime\prime})y + (a_{\prime\prime}c_{\prime} - a_{\prime}c_{\prime\prime})z = a_{\prime\prime}m_{\prime} - a_{\prime}m_{\prime\prime}.$$

Aus den Gleichungen IV. und V. können y und z bestimmt werden.

IV. Die Bézout'sche oder französische Methode. *)

*) Elémens d'algèbre par Lacroix. §. 85. Paris 1815.

Hat man die Gleichungen nach den Unbekannten geordnet, so kann man eine derselben mit einem unbestimmten Factor multipliciren, beide Gleichungen subtrahiren und den neuen Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten gleich Null setzen. Die mittels dieser Hülfsgleichung bestimmte eingeführte Größe kann man alsdann in die neue Gleichung einsetzen.

Beispiel: I. $2x + 5y = 13,$
II. $7x - 3y = 1.$

$$\begin{array}{r} 2mx + 5my = 13m, \\ 7x - 3y = 1 \\ \hline (2m - 7)x + (5m + 3)y = 13m - 1. \end{array}$$

Um x zu eliminiren, setze $2m - 7 = 0$, $m = \frac{7}{2}$.
Es ist demgemäß

$$(5 \cdot \tfrac{7}{2} + 3)y = 13 \cdot \tfrac{7}{2} - 1.$$

Bemerkung: Tritt während der Umformungen eine der Unbekannten, z. B. x, als Factor der ganzen Gleichung auf, so ist $x = 0$ ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichungen. (Nr. 71).

B. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 69.

Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) Eine quadratische Gleichung hat die allgemeine Form

$$x^2 + px + q = 0.$$

Man nennt sie rein, wenn das zweite Glied fehlt: sonst heißt sie gemischt.

A. Reine quadratische Gleichungen.

2) Anleitung: Man löse die Gleichungen nach x^2 auf und radicire, also

$$x^2 = m, \; x = \pm\sqrt{m}.$$

5) Jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln. Sie läßt sich immer als das Product zweier Gleichungen des ersten Grades darstellen.

$$(x - \sqrt{m})\,(x + \sqrt{m}) = 0.$$

B. Gemischte quadratische Gleichungen.

26) I. Formel von Brahmegupta und Mohammed ben Musa.*)

$$x^2 + px = q.$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

Beweis: Aus geometrischen Gründen ist

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 4\left(\frac{p}{4}\right)x + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

und wegen

$$x^2 + px = q,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q,$$

also

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Der zweite Wurzelwerth scheint Mohammed nicht bekannt gewesen zu sein. Bei dem Zahlenbeispiele $x^2 + 21 = 10x$ bemerkt er nur, daß der Gleichung die beiden Werthe 3 und 7 genügen, ohne jedoch den Beweis zu geben.

II. Methode von Vieta.**) Gegeben sei $x^2 + px = q$. Substituirt man für x das Binom $y + z$, worin y eine neue Unbekannte, z eine Bestimmungsgröße bezeichnen, so geht die Gleichung über in

$$y^2 + (2z + p)\,y + (z^2 + pz - q) = 0.$$

Die Gleichung wird in eine rein quadratische verwandelt, wenn man setzt

$$2z + p = 0. \text{ (Resolvente.)}$$

Da also $z = -\dfrac{p}{2}$ ist, so ist die neue Gleichung

$$y^2 - \tfrac{1}{4}(p^2 + 4q) = 0,$$

und

$$x = y + z = -\tfrac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4q}\right).$$

---

*) Brahmegupta algebra, from the sanscrit translated by Colebrooke, London, 1817.

Abu Abdallah Mohammed ben Musa al-Khowaresmi algebra ou'almokabala, edited and translated by Rosen. London, 1831.

**) Vietae, Franc., de aequationum recognitione et emendatione tractatus duo. Paris, 1615.

III. Neue Auflösung der quadratischen Gleichung*). (Das hier entwickelte Verfahren kann auch bei der Auflösung höherer Gleichungen angewandt werden. Vergl. S. 96 Nr. 31.) Gegeben sei $x^2 + px + q = 0$. Man setze

$$\frac{x + z_0}{x + z_1} = u,$$

wo u eine neue Unbekannte, z_0 und z_1 zwei Bestimmungsgrößen bezeichnen. Erhebt man diese Gleichung zur zweiten Potenz, so ist die nach x geordnete Gleichung

$$x^2 + 2 \cdot \frac{z_0 - z_1 u^2}{1 - u^2} x + \frac{z_0^2 - z_1^2 u^2}{1 - u^2} = 0.$$

Durch Vergleichung dieser mit der gegebenen Gleichung erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

$$u^2 = \frac{z_0 - p/2}{z_1 - p/2} = \frac{z_0^2 - q}{z_1^2 - q} = \frac{z_0^2 - pz_0 + q}{z_1^2 - pz_1 + q}.$$

Durch Combination der ersten Ausdrücke für u erhält man

$$z_0 z_1 (z_0 - z_1) - p/2 (z_0^2 - z_1^2) + q(z_0 - z_1) = 0,$$

und weil $z_0 - z_1$ nicht Null werden kann, da sonst $u = 1$ und x unbestimmt bliebe, so dividire man durch $z_0 - z_1$, wodurch man erhält

$$z_0 z_1 - p/2 (z_0 + z_1) + q = 0.$$

Da diese Gleichung zwei Willkürliche enthält, so setze man $z_0 + z_1 = 0$, woraus hervorgeht

$$z_0^2 - q = 0. \text{ (Resolvente.)}$$

Mithin ist

$$x_1 = \frac{z_1 \sqrt{z_0 - p/2} - z_0 \sqrt{z_1 - p/2}}{\sqrt{z_1 - p/2} - \sqrt{z_0 - p/2}}, \quad x_2 = \frac{-z_1 \sqrt{z_0 - p/2} - z_0 \sqrt{z_1 - p/2}}{\sqrt{z_1 - p/2} + \sqrt{z_0 - p/2}}.$$

47) Ist die Gleichung $px^2 - qx + r = 0$ gegeben, so ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$$

Diese Wurzeln sind beide reell, wenn $q^2 \geqq 4pr$, beide imaginär, wenn $q^2 < 4pr$ ist.

*) Matthiessen, die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Leipzig 1866. §. 2 und 7. Die hier gegebene Auflösung ist mit der regula falsi §. 82. 14 β) verwandt, und wird mit Vortheil bei Gleichungen von der Form $x^2 + ax + 1 = 0$ angewandt.

48) Die Wurzeln der vorigen Gleichung sind einander gleich, wenn $q^2 = 4pr$ ist.

154) **Lehrsatz:** In jeder quadratischen Gleichung ist

a) der negative Coefficient des zweiten Gliedes gleich der Summe der beiden Wurzeln;

b) das Absolutglied gleich dem Product der beiden Wurzeln.

Beweis: Bezeichnen wir die beiden Wurzeln mit x_1 und x_2, so wird die Gleichung erfüllt durch die Annahmen $x = x_1$ und $x = x_2$ oder es ist

$$x - x_1 = 0,\ x - x_2 = 0,$$

Multiplicirt man diese binomischen Gleichungen

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

so kann man offenbar diese neue quadratische Gleichung mit der ursprünglichen identificiren. Dies gibt die beiden Bedingungsgleichungen

$$x_1 + x_2 = p,\ x_1 x_2 = q.$$

Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade.

166) Auflösung: Gegeben sei $x^2 \pm px = q$, dann ist

$$x = \mp p/_2 \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Substituirt man $\pm p = 2\sqrt{q} \cdot cot\,\lambda$, so ist

$$x = -\sqrt{q}\ cot\,\lambda \pm \sqrt{q(cot\,\lambda^2 + 1)} = -\sqrt{q} \cdot cot\,\lambda \pm \sqrt{q} : sin\,\lambda$$

mithin

$$x_1 = -\sqrt{q}\,cot\,\lambda + \sqrt{q} : sin\,\lambda = \sqrt{q}\left(\frac{1}{sin\,\lambda} - cot\,\lambda\right)$$

$$= \sqrt{q}\frac{1 - cos\,\lambda}{sin\,\lambda} = \sqrt{q} \cdot tan\,\frac{\lambda}{2}.$$

$$x_2 = -\sqrt{q}\,cot\,\lambda - \sqrt{q} : sin\,\lambda = -\sqrt{q}\left(\frac{1}{sin\,\lambda} + cot\,\lambda\right)$$

$$= -\sqrt{q}\frac{1 + cos\,\lambda}{sin\,\lambda} = -\sqrt{q} \cdot cot\,\frac{\lambda}{2}.$$

167) Auflösung: Gegeben sei $x^2 \pm px = -q$, dann ist

$$x = \mp p/_2 \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

α) $4q \leq p^2$. Substituirt man $\pm\frac{p}{2} = \sqrt{q} : sin\,\lambda$,

so ist

$$x = -\sqrt{q} : \sin\lambda \pm \sqrt{\frac{q(1-\sin\lambda^2)}{\sin\lambda^2}} = -\sqrt{q} : \sin\lambda \pm \sqrt{q}\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda},$$

mithin

$$x_1 = -\sqrt{q}\left[+\frac{1}{\sin\lambda} - \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right] = -\sqrt{q}\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= -\sqrt{q}\tan\frac{\lambda}{2};$$

$$x_2 = -\sqrt{q}\left[+\frac{1}{\sin\lambda} + \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right] = -\sqrt{q}\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= -\sqrt{q}\cot\frac{\lambda}{2}.$$

$\beta)$ $4q > p^2$. Substituirt man $\pm\frac{p}{2} = \sqrt{q}\cdot\cos\vartheta$,

so ist

$$x = -\sqrt{q}\cdot\cos\vartheta \pm \sqrt{q(\cos\vartheta^2 - 1)} =$$
$$-\sqrt{q}\cdot\cos\vartheta \pm \sqrt{q}\cdot\sin\vartheta\sqrt{-1},$$

mithin

$$x_1 = -\sqrt{q}(\cos\vartheta - \sin\vartheta\sqrt{-1}),$$
$$x_2 = -\sqrt{q}(\cos\vartheta + \sin\vartheta\sqrt{-1}).$$

Reciproke Gleichungen höheren Grades, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen.

183) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

Erklärung: Reciproke Gleichungen sind solche, welche dieselben bleiben, wenn man $1/x$ für x einsetzt. Sind sie von geradem Grade, so lassen sie sich stets auf eine Gleichung von der halben Ordnung reduciren.

Lehrsatz: Die Gleichungen von ungeradem Grade der Formen

$$x^5 \pm ax^4 + bx^3 + bx^2 \pm ax + 1 = 0$$

haben den Factor $x + 1$; hingegen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0,$$
$$x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + ax - 1 = 0$$

den Factor $x - 1$.

Lehrsatz: Ist ein zwei- oder mehrgliedriger Ausdruck der Unbekannten ein Factor einer gegebenen

Gleichung, so liefert dieser Factor gleich Null gesetzt eine besondere Bestimmungsgleichung für die Unbekannten.

Beispiel: Nr. 192. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x + 1)(x^2 + ax - x + 1) = 0.$

Hieraus gehen hervor die zwei Gleichungen

$$x + 1 = 0, \; x^2 + ax - x + 1 = 0.$$

Andere Beispiele sind Nr. 196, 204, 218.

Trigonometrische Auflösung der reciproken Gleichungen.

Es sei gegeben

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Setzt man

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{-b+2}}{a}, \; \sin 2\beta_1 = -\sqrt{\frac{4}{-b+2}} \cdot \tan \alpha,$$

$$\sin 2\beta_2 = \sqrt{\frac{4}{-b+2}} \cdot \cot \alpha,$$

so ist

$$x_1 = -\tan \beta_1, \; x_2 = -\cot \beta_1, \; x_3 = \cot \beta_2, \; x_4 = \tan \beta_2.$$

§. 73.

Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

Anleitung: Zur algebraischen Auflösung bedient man sich ebenfalls der in §. 65 angegebenen Methoden.

Zur Elimination der Unbekannten aus Gleichungen von zweiten und höheren Graden kann man sich oft mit Vortheil der Methode des gemeinschaftlichen Theilers*) bedienen.

Beispiel §. 73, Nr. 46:

$$\text{I.} \quad -x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x - 12y = 4,$$

$$\text{II.} \quad x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53.$$

---

*) Vergleiche Francoeur, Cours de Mathématiques pures. §. 522. Paris, 1837.

Reducirt man beide Gleichungen auf Null und bezeichnet sie resp. mit $A = 0$, $A_1 = 0$ [illegible] $x = \alpha$, $y = \beta$ zwei [illegible] Werthe, welche $A = 0$ und $A_1 = 0$ erfüllen, so ist

$$A = q \cdot A_1 + R$$
$$A_1 = q_1 \cdot R + R_1$$
$$R = q_2 R_1 + R_2\,.$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$R_{n-2} = q_n R_{n-1} + R_n$$

Wenn man auf diese Art die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers der nach Potenzen von x geordneten Ausdrücke A und A_1 fortsetzt, kommt man zuletzt auf einen Rest R_n, welcher nur y enthält. Weil aber A und A_1 gleich Null sind, so ist R ebenfalls Null und so alle übrigen Reste, mithin ist auch

$$R_n = 0,$$

aus welcher Gleichung y gefunden wird. Da R_{n-1} die Unbekannte x nur noch in der ersten Potenz enthält, so kann man die aus der für R_n gefundenen Werthe y in die Gleichung

$$R_{n-1} = 0$$

substituiren und somit die zugehörigen Werthe von x finden. Das vorstehende Beispiel wird auf folgende Art berechnet:

$$\text{I. } x^2 - 6xy - 4x + 9y^2 + 12y + 4 = A = 0,$$
$$\text{II. } x^2 - 2xy - 4x + 3y^2 + 5y - 53 = A_1 = 0.$$
$$q = 1,\ R = -4xy + 6y^2 + 7y + 57 = 0.$$

Multiplicirt man A_1 mit $-16y^2$, also

$$-16y^2 \cdot A_1 = 16x^2y^2 - 32xy^3 - 64xy^2 + 48y^4 + 80y^3$$
$$- 848y^2 = 0,$$

und dividirt durch R, so erhält man

$$-16y^2 \cdot q_1 = 4xy - 2y^2 - 9y + 57,$$
$$-16y^2 \cdot R^1 = 36y^4 + 12y^3 - 683y^2 - 114y + 57^2 = 0.$$

Da sich hieraus die Wurzel ziehen läßt, so reducirt sich die y Gleichung auf eine quadratische, nämlich

$$6y^2 + y - 57 = 0,\ y_1 \text{ und } y_2 = -\tfrac{1}{12}[1 \pm 37].$$

Substituirt man diese Werthe in R, so findet man

$$x_1 \text{ und } x_2 = \tfrac{3}{2}\left[\frac{1 \pm 37 - 228}{1 \pm 37}\right].$$

15) In vielen Fällen gelingt es, die gegebenen Gleichungen auf die Gleichungen

$$x + y = s, \quad x - y = d,$$
$$xy = p, \quad xy = p.$$

zurückzuführen. Neuerdings ist von Förstemann *) und Heis **) gezeigt, wie man diese und ähnliche Gleichungen mit Hülfe goniometrischer Functionen auflösen kann.

Beispiel: Nr. 26 a). $xy = a,\ x^2 + y^2 = b$.

Auflösung: Sollen x und y reell sein, so muß $b \geqq 2a$ sein. Man setze

$$x = \sqrt{b} \cdot \sin\lambda,\ y = \sqrt{b} \cdot \cos\lambda,$$

dann ist

$$a = b \sin\lambda \cdot \cos\lambda, \text{ also } \sin 2\lambda = 2a : b.$$

Ist aber $b < 2a$, so setze man

$$x = \sqrt{a}(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}),\ y = \sqrt{a}(\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}),$$

$$xy = a,\ x^2 + y^2 = 2a(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) = 2a\cos 2\alpha = b,$$

also

$$\cos 2\alpha = b : (2a).$$

C. Diophantische Gleichungen.

§. 77.

Historisches: Der Alexandriner Diophantos wird gewöhnlich als der Erfinder der sogenannten „unbestimmten Analytik" bezeichnet. Er lebte nach Bombelli um 160 nach Chr., nach Abulfarag um 360 n. Chr. und schrieb arithmeticorum libri VI, eigentlich XIII, indeß sind die anderen bis auf ein Fragment des VIIten verloren. Dieses Werk ist zuerst commentirt von der Hypatia (400) und von Abul Wafa (970). Außerdem schrieb der Inder Aryabattha, wahrscheinlich Zeitgenosse von Diophant, ein Werk über Geometrie und Arithmetik, worin er die unbestimmten

*) Förstemann, Ueber die Auflösung quadratischer, cubischer und biquadratischer Gleichungen mittels goniometrischer Functionen. Danzig 1836.
**) Heis, Trigonometrie VIII, 110—117.

Gleichungen durch eine allgemeine Methode auflöste. Aus seinen verloren gegangenen Werken schöpfte der Inder Brahmegupta (um 650 n. Chr.), dessen Algebra aus dem Sanskrit übersetzt ist (vergl. §. 69 *). Brahmegupta erfand auch eine Methode, die unbestimmten Gleichungen zweiten Grades allgemein aufzulösen, wenn eine der Wurzeln bekannt ist. Es ist dieselbe Methode, welche über ein Jahrtausend später von Euler gegeben ist. Wenn man aber der Zeitrechnung Glauben schenken darf, so finden wir die ältesten Spuren der unbestimmten Analytik bei den Chinesen. Tsin-Kiu-Tschaou schrieb um 2600 v. Chr. ein Buch über Arithmetik, benannt Kiu-tschang, welches Beispiele aus der bestimmten und unbestimmten Analytik enthält. Später schrieb der Algebrist Sun-Tsze (innerhalb des Zeitraumes von 200 v. Chr. bis 300 n. Chr. lebend) das Buch Ta-yen (große Erweiterung), welches über dasselbe Capitel handelt.

Vorbemerkungen: In dem vorangehenden Theile des IVten Abschnittes wurden Gleichungen gelöst, deren gegebene Anzahl der der Unbekannten gleich ist. Die Unbekannten haben dann immer nur eine bestimmte Anzahl von Werthen. Ist alles dieses nicht der Fall, so können gegeben sein

a) mehr Gleichungen als Unbekannte;
b) weniger Gleichungen als Unbekannte.

Demgemäß wird die Algebra eingetheilt in

1) die bestimmte Analytik;
2) die Methode der wahrscheinlichsten Werthe;
3) die unbestimmte Analytik.

Beispiel der bestimmten Analytik.

$$x^2 = 4x + 5.$$

Man findet nach §. 69. 26) x_1 und $x_2 = 2 \pm 3$.

Beispiel der überbestimmten Analytik oder der Methode der wahrscheinlichsten Werthe.

Angenommen, man habe die unbekannte Größe x durch wiederholte Messungen oder Versuche gesucht und nach einander gefunden

$$x + 4 = 0,$$
$$x + 4{,}2 = 0,$$
$$x + 4{,}1 = 0,$$
$$x + 3{,}9 = 0.$$

Da man die wahre Größe x nicht kennt, so enthalten die gegebenen Gleichungen Fehler, welche wir mit v_0 $v_{\prime}$ $v_{\prime\prime}$ $v_{\prime\prime\prime}$ bezeichnen, also

$$\begin{aligned} x + 4 \quad &= v_0\,, \\ x + 4{,}2 &= v_{\prime}\,, \\ x + 4{,}1 &= v_{\prime\prime}\,, \\ x + 3{,}9 &= v_{\prime\prime\prime}. \end{aligned}$$

Nun wird in der höheren Mathematik gezeigt, daß der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten x derjenige ist, für welchen die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Es sei also

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 + (x + 4{,}2)^2 + (x + 4{,}1)^2 + (x + 3{,}9)^2 \\ = v_0^2 + v_{\prime}^2 + v_{\prime\prime}^2 + v_{\prime\prime\prime}^2 = V_{\min}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$x^2 + 8{,}1x + 16{,}415 = \frac{V}{4},$$

$$x = -\frac{8{,}1}{2} \pm \sqrt{16{,}4025 - 16{,}415 + \frac{V}{4}}.$$

Es kann also V ein Minimum werden, nämlich $-0{,}05$. Dann ist $x = -4{,}05$ (arithmetisches Mittel).

Beispiele der unbestimmten Analytik
oder der Diophantischen Gleichungen enthält §. 77.

Führt eine Aufgabe auf weniger Gleichungen als Unbekannte, so bleiben einige willkürlich. Deßhalb lassen diese Gleichungen im Allgemeinen unendlich viele Lösungen zu. Indeß wird immer die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Wurzeln ganze positive, oder mindestens rationale Zahlen sein sollen. Hiedurch wird die Anzahl der Wurzeln oft auf eine geringe beschränkt. Daneben kann jedoch auch der Fall eintreten, daß die Anzahl der Wurzeln Null oder ∞ ist. In letzterem Falle springen dieselben jedoch nicht immer leicht in die Augen und liegen oft weit aus einander, z. B.:

$$x^3 + (x + y)^3 + (x + 2y)^3 = z^3.$$

$$x_1 = 3,\ y_1 = 1,\ z_1 = 6, \text{ also } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

$$x_2 = 1839,\ y_2 = -1871,\ z_2 = -876, \text{ also}$$
$$1839^3 + (-32)^3 + (-1903)^3 = (-876)^3.$$

Die allgemeinste Form der Gleichungen vom 1sten Grade mit zwei Unbekannten ist

$$ax \pm by = c.$$

Wenn die Auflösung überhaupt möglich ist, hat die erste Gleichung eine begränzte Anzahl Wurzeln, die zweite eine unbegränzte. Die Gleichung

$$ax - by = 0$$

hat ebenfalls eine unbegränzte Anzahl von Auflösungen, die Gleichung

$$ax + by = 0$$

keine einzige.

4) Methode von Euler.

$$5x + 7y = 52.$$

Man drückt zunächst die Unbekannte mit dem kleinsten Coefficienten durch die übrigen Glieder aus, also

$$x = \frac{52 - 7y}{5} = 10 - y - \frac{2y - 2}{5}.$$

Soll x eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{2y - 2}{5}$ eine ganze sein, also etwa z, so ist

$$x = 10 - y - z, \qquad \frac{2y - 2}{5} = z,$$

$$y = 2z + 1 + \frac{z}{2}. \qquad \frac{z}{2} = t,$$

$$z = 2t.$$

Rückwärts substituirt

$$y = 5t + 1, \text{ also } 5t + 1 > 0, \; t > -\tfrac{1}{5},$$
$$x = 9 - 7t, \qquad 9 - 7t > 0, \; t < \tfrac{9}{7}.$$

Hieraus ergeben sich die Wurzelwerthe

$$t = 0, 1.$$
$$y = 1, 6.$$
$$x = 9, 2.$$

Methode von Aryabattha und Bachet de Meziriak. Sie besteht in dem Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers der Coefficienten der Unbekannten. Es sei

$$ax - by = c, \text{ wo } b < a \text{ ist,}$$

und

$$\begin{aligned} a &= Ab + c, & \text{so wird } y &= Ax + z, \\ b &= Bc + d, & x &= Bz + t, \\ c &= Cd + e, & z &= Ct + u, \\ d &= De, & t &= Du \pm c. \end{aligned}$$

In der letzten Bestimmung wird $+ c$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, sonst $- c$.

Im Grunde fällt diese Methode mit der der Kettenbrüche zusammen. (Vergleiche §. 87.) Man gebe nun der Gleichung $5x + 7y = 52$ die Form

$$7y - 5(-x) = 52,$$

so ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll} 7 = 1 \cdot 5 + 2, & (-x) = 1 \cdot y + z, & \text{Rückwärts} \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1, & y = 2 \cdot z + t, & y = 5t - 104, \\ 2 = 2 \cdot 1. & z = 2t - 52. & x = -7t - 156. \end{array}$$

Die Bedingungen, daß y und x positiv und ganz seien, sind $t > 20\frac{4}{5}$, $t < 22\frac{2}{7}$. Setzt man also $t + 21 = t_1$, so wird wie oben

$$y = 5t_1 + 1, \; x = 9 - 7t_1.$$

11) Wenn die allgemeine Form der Gleichung

$$ax - by = c$$

ist, so kann man immer annehmen, daß a, b, c keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Soll dann eine Lösung in ganzen Zahlen möglich sein, so müssen a und b relativ sein. Denn sonst wäre $a = \alpha \cdot a_1$, $b = \alpha \cdot b_1$ und

$$ax - by = \alpha(a_1 x - b_1 y) = c,$$

also offenbar α auch ein Maß von c, was gegen die Annahme ist.

§. 79.

Aufgaben als Anwendung der diophantischen Gleichungen vom ersten, zweiten und höheren Graden.

17) Anleitung: Sind mehrere Gleichungen

$$ax - by = c,$$
$$a_{\prime}x - b_{\prime}z = c_{\prime},$$
$$a_{\prime\prime}x - b_{\prime\prime}v = c_{\prime\prime}, \text{ u. s. w.}$$

gegeben, so löse man die erste auf und substituire den Wurzelwerth $x = \alpha + \beta n$ in die zweite u. s. f.

29 a) Diophantische Gleichungen, in denen Producte der Unbekannten vorkommen, heißen zusammengesetzte.

Euler'sche Methode. Gegeben sei

$$xy + ax + by = c.$$

Dann ist

$$y = \frac{c - ax}{b + x} = -a + \frac{ab + c}{x + b} = -a + \frac{f \cdot g}{x + b}.$$

Sind f und g die zwei Factoren des Ausdrucks $ab + c$, so ist

$$y = -a + f, \; x + b = g.$$

36) Die allgemeinste Form der Gleichungen vom zweiten Grade mit 3 Unbekannten ist

$$z^2 + a(x + by + c)\, z + dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0,$$

und nach z aufgelöst

$$z = -a/_2(x + by + c) \pm \sqrt{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

Um rationale Werthe für die Wurzeln zu erhalten, muß man suchen den Radicanden in ein vollkommenes Quadrat zu verwandeln, was meistens möglich ist, wenn entweder A oder F Quadrate und einige Glieder Null sind. Man setze z. B.:

$$a^2x^2 + Bxy + Cy^2 = (ax + my)^2.$$

In anderen Fällen muß man suchen, eine Wurzel zu errathen, mittels deren beliebig viele neue Wurzeln gefunden werden.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen, Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

D. Progressionen.

§. 81.

1) Arithmetische Progressionen.

Bedeutet a das Anfangsglied, t das Endglied, n die Anzahl der Glieder, d die Differenz, s die Summe aller Glieder, so ist

$$\text{I.} \quad t = a + (n - 1)d.$$

$$\text{II.} \quad s = \tfrac{1}{2}n(a + t) = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

1) Definition: Unter einer arithmetischen Progression oder Reihe versteht man die Aufeinanderfolge derartig fortschreitender Zahlengrößen, daß der Unterschied (Differenz der Reihe) je zweier auf einander folgenden Glieder eine constante Größe ist, also

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ a + (n-2)d,\ a + (n-1)d.$$

2) Ist die constante Differenz d positiv, so ist die Progression eine zunehmende, ist d negativ, eine abnehmende.

4) Lehrsatz: Die Summe s oder das summatorische Glied, welches auch wohl durch Σt bezeichnet wird, wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. (Formel II.)

Beweis: Man schreibe die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung unter dieselbe und addire:

$$\begin{array}{lllll} a, & a + d, & a + 2d, & \ldots & a + (n-1)d, \\ a + (n-1)d, & a + (n-2)d, & a + (n-3)d, & \ldots & a, \\ \hline 2a + (n-1)d, & 2a + (n-1)d, & 2a + (n-1)d, & \ldots & \underset{(n)}{2a + (n-1)d.} \end{array}$$

Mithin ist

$$\Sigma_t = s = \tfrac{1}{2}n[2a + (n-1)d] = \tfrac{1}{2}n(a + t).$$

§. 82.

Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen.

14) Bezeichnet man das $n$te Glied der Substitutionen mit $c + (n-1)d$, so daß man für $n = 1$ das erste c erhält, so ist

$$y = a[c + (n-1)d] + b = (ac + b) + (n-1)\,ad.$$

Mithin ist $ac + b$ das Anfangsglied, ad die Differenz.

15—22) Allgemeine Sätze von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Wir wollen annehmen, daß die Glieder der Reihe

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_{x-1}$$

die auf einander folgenden Werthe einer rationalen ganzen algebraischen Function, z. B.:

$$y_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

darstellen, indem man in derselben für x nach einander die Werthe $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ einsetzt. Die einzelnen Substitutionen

$$x = -\sqrt{q} : \sin\lambda \pm \sqrt{\frac{q(1-\sin\lambda^2)}{\sin\lambda^2}} = -\sqrt{q} : \sin\lambda \pm \sqrt{q}\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda},$$

mithin

$$x_1 = -\sqrt{q}\left[+\frac{1}{\sin\lambda} - \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right] = -\sqrt{q}\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= -\sqrt{q}\tan\frac{\lambda}{2};$$

$$x_2 = -\sqrt{q}\left[+\frac{1}{\sin\lambda} + \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right] = -\sqrt{q}\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= -\sqrt{q}\cot\frac{\lambda}{2}.$$

β) $4q > p^2$. Substituirt man $\pm\frac{p}{2} = \sqrt{q}\cdot\cos\vartheta$, so ist

$$x = -\sqrt{q}\cdot\cos\vartheta \pm \sqrt{q(\cos\vartheta^2 - 1)} =$$
$$-\sqrt{q}\cdot\cos\vartheta \pm \sqrt{q}\cdot\sin\vartheta\sqrt{-1},$$

mithin

$$x_1 = -\sqrt{q}(\cos\vartheta - \sin\vartheta\sqrt{-1}),$$
$$x_2 = -\sqrt{q}(\cos\vartheta + \sin\vartheta\sqrt{-1}).$$

Reciproke Gleichungen höheren Grades, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen.

183) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

Erklärung: Reciproke Gleichungen sind solche, welche dieselben bleiben, wenn man $1/x$ für x einsetzt. Sind sie von geradem Grade, so lassen sie sich stets auf eine Gleichung von der halben Ordnung reduciren.

Lehrsatz: Die Gleichungen von ungeradem Grade der Formen

$$x^5 \pm ax^4 + bx^3 + bx^2 \pm ax + 1 = 0$$

haben den Factor $x + 1$; hingegen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0,$$
$$x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + ax - 1 = 0$$

den Factor $x - 1$.

Lehrsatz: Ist ein zwei- oder mehrgliedriger Ausdruck der Unbekannten ein Factor einer gegebenen

Gleichung, so liefert dieser Factor gleich Null gesetzt eine besondere Bestimmungsgleichung für die Unbekannten.

Beispiel: Nr. 192. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x + 1)(x^2 + ax - x + 1) = 0$.

Hieraus gehen hervor die zwei Gleichungen

$$x + 1 = 0,\ x^2 + ax - x + 1 = 0.$$

Andere Beispiele sind Nr. 196, 204, 218.

Trigonometrische Auflösung der reciproken Gleichungen.

Es sei gegeben

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Setzt man

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{-b+2}}{a},\ \sin 2\beta_1 = -\sqrt{\frac{4}{-b+2}} \cdot \tan \alpha,$$

$$\sin 2\beta_2 = \sqrt{\frac{4}{-b+2}} \cdot \cot \alpha,$$

so ist

$$x_1 = -\tan \beta_1,\ x_2 = -\cot \beta_1,\ x_3 = \cot \beta_2,\ x_4 = \tan \beta_2.$$

§. 73.

Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

Anleitung: Zur algebraischen Auflösung bedient man sich ebenfalls der in §. 65 angegebenen Methoden.

Zur Elimination der Unbekannten aus Gleichungen von zweiten und höheren Graden kann man sich oft mit Vortheil der Methode des gemeinschaftlichen Theilers*) bedienen.

Beispiel §. 73, Nr. 46:

$$\text{I.} \quad -x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x - 12y = 4,$$

$$\text{II.} \quad x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53.$$

---

*) Vergleiche Francoeur, Cours de Mathématiques pures. §. 522. Paris, 1837.

Reducirt man beide Gleichungen auf Null und bezeichnet sie resp. mit $A = 0$, $A_{,} = 0$; sind ferner $x = \alpha$, $y = \beta$ zwei zusammengehörige Werthe, welche $A = 0$ und $A_{,} = 0$ erfüllen, so ist

$$\begin{aligned} A &= q \cdot A_{,} + R, \\ A_{,} &= q_{,} \cdot R + R_{,}, \\ R &= q_{,,} R_{,} + R_{,,}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_{n-2} &= q_n R_{n-1} + R_n. \end{aligned}$$

Wenn man auf diese Art die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers der nach Potenzen von x geordneten Ausdrücke A und $A_{,}$ fortsetzt, kommt man zuletzt auf einen Rest R_n, welcher nur y enthält. Weil aber A und $A_{,}$ gleich Null sind, so ist R ebenfalls Null und so alle übrigen Reste, mithin ist auch

$$R_n = 0,$$

aus welcher Gleichung y gefunden wird. Da R_{n-1} die Unbekannte x nur noch in der ersten Potenz enthält, so kann man die aus der für R_n gefundenen Werthe y in die Gleichung

$$R_{n-1} = 0$$

substituiren und somit die zugehörigen Werthe von x finden. Das vorstehende Beispiel wird auf folgende Art berechnet:

$$\text{I.}\ x^2 - 6xy - 4x + 9y^2 + 12y + 4 = A = 0,$$
$$\text{II.}\ x^2 - 2xy - 4x + 3y^2 + 5y - 53 = A_{,} = 0.$$
$$q = 1,\ R = -4xy + 6y^2 + 7y + 57 = 0.$$

Multiplicirt man $A_{,}$ mit $-16y^2$, also

$$-16y^2 \cdot A_{,} = 16x^2y^2 - 32xy^3 - 64xy^2 + 48y^4 + 80y^3 - 848y^2 = 0,$$

und dividirt durch R, so erhält man

$$-16y^2 \cdot q_1 = 4xy - 2y^2 - 9y + 57,$$
$$-16y^2 \cdot R^1 = 36y^4 + 12y^3 - 683y^2 - 114y + 57^2 = 0.$$

Da sich hieraus die Wurzel ziehen läßt, so reducirt sich die y Gleichung auf eine quadratische, nämlich

$$6y^2 + y - 57 = 0,\ y_1 \text{ und } y_2 = -\tfrac{1}{12}[1 \pm 37].$$

Substituirt man diese Werthe in R, so findet man

$$x_1 \text{ und } x_2 = \tfrac{3}{2}\left[\frac{1 \pm 37 - 228}{1 \pm 37}\right].$$

15) In vielen Fällen gelingt es, die gegebenen Gleichungen auf die Gleichungen

$$x + y = s, \quad x - y = d,$$
$$xy = p, \quad xy = p.$$

zurückzuführen. Neuerdings ist von Förstemann*) und Heis**) gezeigt, wie man diese und ähnliche Gleichungen mit Hülfe goniometrischer Functionen auflösen kann.

Beispiel: Nr. 26 a). $xy = a,\ x^2 + y^2 = b.$

Auflösung: Sollen x und y reell sein, so muß $b \geqq 2a$ sein. Man setze

$$x = \sqrt{b} \cdot \sin \lambda, \quad y = \sqrt{b} \cdot \cos \lambda,$$

dann ist

$$a = b \sin \lambda \cdot \cos \lambda, \text{ also } \sin 2\lambda = 2a : b.$$

Ist aber $b < 2a$, so setze man

$$x = \sqrt{a}\left(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sqrt{-1}\right),\ y = \sqrt{a}\left(\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sqrt{-1}\right),$$

$$xy = a,\ x^2 + y^2 = 2a(\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) = 2a \cos 2\alpha = b,$$

also

$$\cos 2\alpha = b : (2a).$$

C. Diophantische Gleichungen.

§. 77.

Historisches: Der Alexandriner Diophantos wird gewöhnlich als der Erfinder der sogenannten „unbestimmten Analytik" bezeichnet. Er lebte nach Bombelli um 160 nach Chr., nach Abulfarag um 360 n. Chr. und schrieb arithmeticorum libri VI, eigentlich XIII, indeß sind die anderen bis auf ein Fragment des VIIten verloren. Dieses Werk ist zuerst commentirt von der Hypatia (400) und von Abul Wafa (970). Außerdem schrieb der Inder Aryabattha, wahrscheinlich Zeitgenosse von Diophant, ein Werk über Geometrie und Arithmetik, worin er die unbestimmten

*) Förstemann, Ueber die Auflösung quadratischer, cubischer und biquadratischer Gleichungen mittels goniometrischer Functionen. Danzig 1836.
**) Heis, Trigonometrie VIII, 110—117.

Gleichungen durch eine allgemeine Methode auflöste. Aus seinen verloren gegangenen Werken schöpfte der Inder Brahmegupta (um 650 n. Chr.), dessen Algebra aus dem Sanskrit übersetzt ist (vergl. §. 69 *). Brahmegupta erfand auch eine Methode, die unbestimmten Gleichungen zweiten Grades allgemein aufzulösen, wenn eine der Wurzeln bekannt ist. Es ist dieselbe Methode, welche über ein Jahrtausend später von Euler gegeben ist. Wenn man aber der Zeitrechnung Glauben schenken darf, so finden wir die ältesten Spuren der unbestimmten Analytik bei den Chinesen. Tsin-Kiu-Tschaou schrieb um 2600 v. Chr. ein Buch über Arithmetik, benannt Kiu-tschang, welches Beispiele aus der bestimmten und unbestimmten Analytik enthält. Später schrieb der Algebrist Sun-Tsze (innerhalb des Zeitraumes von 200 v. Chr. bis 300 n. Chr. lebend) das Buch Ta-yen (große Erweiterung), welches über dasselbe Capitel handelt.

Vorbemerkungen: In dem vorangehenden Theile des IVten Abschnittes wurden Gleichungen gelöst, deren gegebene Anzahl der der Unbekannten gleich ist. Die Unbekannten haben dann immer nur eine bestimmte Anzahl von Werthen. Ist alles dieses nicht der Fall, so können gegeben sein

a) mehr Gleichungen als Unbekannte;
b) weniger Gleichungen als Unbekannte.

Demgemäß wird die Algebra eingetheilt in

1) die bestimmte Analytik;
2) die Methode der wahrscheinlichsten Werthe;
3) die unbestimmte Analytik.

Beispiel der bestimmten Analytik.

$$x^2 = 4x + 5.$$

Man findet nach §. 69. 26) x_1 und $x_2 = 2 \pm 3$.

Beispiel der überbestimmten Analytik oder der Methode der wahrscheinlichsten Werthe.

Angenommen, man habe die unbekannte Größe x durch wiederholte Messungen oder Versuche gesucht und nach einander gefunden

$$x + 4 \quad = 0,$$
$$x + 4{,}2 = 0,$$
$$x + 4{,}1 = 0,$$
$$x + 3{,}9 = 0.$$

Da man die wahre Größe x nicht kennt, so enthalten die gegebenen Gleichungen Fehler, welche wir mit v_0 $v_{\prime}$ $v_{\prime\prime}$ $v_{\prime\prime\prime}$ bezeichnen, also

$$\begin{aligned} x + 4 &= v_0, \\ x + 4{,}2 &= v_{\prime}, \\ x + 4{,}1 &= v_{\prime\prime}, \\ x + 3{,}9 &= v_{\prime\prime\prime}. \end{aligned}$$

Nun wird in der höheren Mathematik gezeigt, daß der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten x derjenige ist, für welchen die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Es sei also

$$(x + 4)^2 + (x + 4{,}2)^2 + (x + 4{,}1)^2 + (x + 3{,}9)^2$$
$$= v_0^2 + v_{\prime}^2 + v_{\prime\prime}^2 + v_{\prime\prime\prime}^2 = V_{\min}.$$

Dann ist

$$x^2 + 8{,}1x + 16{,}415 = \frac{V}{4},$$

$$x = -\frac{8{,}1}{2} \pm \sqrt{16{,}4025 - 16{,}415 + \frac{V}{4}}.$$

Es kann also V ein Minimum werden, nämlich $-0{,}05$. Dann ist $x = -4{,}05$ (arithmetisches Mittel).

Beispiele der unbestimmten Analytik
oder der Diophantischen Gleichungen enthält §. 77.

Führt eine Aufgabe auf weniger Gleichungen als Unbekannte, so bleiben einige willkürlich. Deßhalb lassen diese Gleichungen im Allgemeinen unendlich viele Lösungen zu. Indeß wird immer die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Wurzeln ganze positive, oder mindestens rationale Zahlen sein sollen. Hiedurch wird die Anzahl der Wurzeln oft auf eine geringe beschränkt. Daneben kann jedoch auch der Fall eintreten, daß die Anzahl der Wurzeln Null oder ∞ ist. In letzterem Falle springen dieselben jedoch nicht immer leicht in die Augen und liegen oft weit aus einander, z. B.:

$$x^3 + (x + y)^3 + (x + 2y)^3 = z^3.$$

$$x_1 = 3, y_1 = 1, z_1 = 6, \text{ also } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

$$x_2 = 1839, y_2 = -1871, z_2 = -876, \text{ also}$$
$$1839^3 + (-32)^3 + (-1903)^3 = (-876)^3.$$

Die allgemeinste Form der Gleichungen vom 1sten Grade mit zwei Unbekannten ist

$$ax \pm by = c.$$

Wenn die Auflösung überhaupt möglich ist, hat die erste Gleichung eine begränzte Anzahl Wurzeln, die zweite eine unbegränzte. Die Gleichung

$$ax - by = 0$$

hat ebenfalls eine unbegränzte Anzahl von Auflösungen, die Gleichung

$$ax + by = 0$$

keine einzige.

4) Methode von Euler.

$$5x + 7y = 52.$$

Man drückt zunächst die Unbekannte mit dem kleinsten Coefficienten durch die übrigen Glieder aus, also

$$x = \frac{52 - 7y}{5} = 10 - y - \frac{2y - 2}{5}.$$

Soll x eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{2y - 2}{5}$ eine ganze sein, also etwa z, so ist

$$x = 10 - y - z, \qquad \frac{2y - 2}{5} = z,$$

$$y = 2z + 1 + \frac{z}{2}. \qquad \frac{z}{2} = t,$$

$$z = 2t.$$

Rückwärts substituirt

$$y = 5t + 1, \text{ also } 5t + 1 > 0, \; t > -\tfrac{1}{5},$$

$$x = 9 - 7t, \qquad 9 - 7t > 0, \; t < \tfrac{9}{7}.$$

Hieraus ergeben sich die Wurzelwerthe

$$t = 0, 1.$$

$$y = 1, 6.$$

$$x = 9, 2.$$

Methode von Aryabattha und Bachet de Meziriak. Sie besteht in dem Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers der Coefficienten der Unbekannten. Es sei

$$ax - by = c, \text{ wo } b < a \text{ ist,}$$

und

$$\begin{aligned} a &= Ab + c, & \text{so wird } y &= Ax + z, \\ b &= Bc + d, & x &= Bz + t, \\ c &= Cd + e, & z &= Ct + u, \\ d &= De, & t &= Du \pm c. \end{aligned}$$

In der letzten Bestimmung wird $+ c$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, sonst $- c$.

Im Grunde fällt diese Methode mit der der Kettenbrüche zusammen. (Vergleiche §. 87.) Man gebe nun der Gleichung $5x + 7y = 52$ die Form

$$7y - 5(-x) = 52,$$

so ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll} 7 = 1 \cdot 5 + 2, & (-x) = 1 \cdot y + z, & \text{Rückwärts} \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1, & y = 2 \cdot z + t, & y = 5t - 104, \\ 2 = 2 \cdot 1. & z = 2t - 52. & x = -7t - 156. \end{array}$$

Die Bedingungen, daß y und x positiv und ganz seien, sind $t > 20\frac{4}{5}$, $t < 22\frac{2}{7}$. Setzt man also $t + 21 = t_1$, so wird wie oben

$$y = 5t_1 + 1, \; x = 9 - 7t_1.$$

11) Wenn die allgemeine Form der Gleichung

$$ax - by = c$$

ist, so kann man immer annehmen, daß a, b, c keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Soll dann eine Lösung in ganzen Zahlen möglich sein, so müssen a und b relativ sein. Denn sonst wäre $a = \alpha \cdot a_1$, $b = \alpha \cdot b_1$ und

$$ax - by = \alpha(a_1 x - b_1 y) = c,$$

also offenbar α auch ein Maß von c, was gegen die Annahme ist.

§. 79.

Aufgaben als Anwendung der diophantischen Gleichungen vom ersten, zweiten und höheren Graden.

17) Anleitung: Sind mehrere Gleichungen

$$\begin{aligned} ax - by &= c, \\ a_{\prime}x - b_{\prime}z &= c_{\prime}, \\ a_{\prime\prime}x - b_{\prime\prime}v &= c_{\prime\prime}, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

gegeben, so löse man die erste auf und substituire den Wurzelwerth $x = \alpha + \beta n$ in die zweite u. s. f.

29 a) Diophantische Gleichungen, in denen Producte der Unbekannten vorkommen, heißen zusammengesetzte.

Euler'sche Methode. Gegeben sei

$$xy + ax + by = c.$$

Dann ist

$$y = \frac{c - ax}{b + x} = -a + \frac{ab + c}{x + b} = -a + \frac{f \cdot g}{x + b}.$$

Sind f und g die zwei Factoren des Ausdrucks $ab + c$, so ist

$$y = -a + f,\ x + b = g.$$

36) Die allgemeinste Form der Gleichungen vom zweiten Grade mit 3 Unbekannten ist

$$z^2 + a(x + by + c)z + dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0,$$

und nach z aufgelöst

$$z = -a/_2(x + by + c) \pm \sqrt{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

Um rationale Werthe für die Wurzeln zu erhalten, muß man suchen den Radicanden in ein vollkommenes Quadrat zu verwandeln, was meistens möglich ist, wenn entweder A oder F Quadrate und einige Glieder Null sind. Man setze z. B.:

$$a^2x^2 + Bxy + Cy^2 = (ax + my)^2.$$

In anderen Fällen muß man suchen, eine Wurzel zu errathen, mittels deren beliebig viele neue Wurzeln gefunden werden.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen, Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

D. Progressionen.

§. 81.

1) Arithmetische Progressionen.

Bedeutet a das Anfangsglied, t das Endglied, n die Anzahl der Glieder, d die Differenz, s die Summe aller Glieder, so ist:

$$\text{I. } t = a + (n - 1)d.$$

$$\text{II. } s = \tfrac{1}{2}n(a + t) = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

1) Definition: Unter einer arithmetischen Progression oder Reihe versteht man die Aufeinanderfolge derartig fortschreitender Zahlengrößen, daß der Unterschied (Differenz der Reihe) je zweier auf einander folgenden Glieder eine constante Größe ist, also

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots.\ a + (n - 2)d,\ a + (n - 1)d.$$

2) Ist die constante Differenz d positiv, so ist die Progression eine zunehmende, ist d negativ, eine abnehmende.

4) Lehrsatz: Die Summe s oder das summatorische Glied, welches auch wohl durch Σt bezeichnet wird, wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. (Formel II.)

Beweis: Man schreibe die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung unter dieselbe und addire:

$$\begin{array}{lllll} a, & a + d, & a + 2d, & \ldots. & a + (n-1)d, \\ a + (n - 1)d, & a + (n - 2)d, & a + (n-3)d, & \ldots. & a, \\ \hline 2a + (n - 1)d, & 2a + (n - 1)d, & 2a + (n-1)d, & \ldots. & 2a + (n-1)d. \\ & & & & \quad (n) \end{array}$$

Mithin ist

$$\Sigma_t = s = \tfrac{1}{2}n[2a + (n-1)d] = \tfrac{1}{2}n(a + t).$$

§. 82.

Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen.

14) Bezeichnet man das $n$te Glied der Substitutionen mit $c + (n - 1)d$, so daß man für $n = 1$ das erste c erhält, so ist

$$y = a[c + (n - 1)d] + b = (ac + b) + (n - 1)\ ad.$$

Mithin ist $ac + b$ das Anfangsglied, ad die Differenz.

15—22) Allgemeine Sätze von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Wir wollen annehmen, daß die Glieder der Reihe

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots. \quad y_{x-1}$$

die auf einander folgenden Werthe einer rationalen ganzen algebraischen Function, z. B.:

$$y_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

darstellen, indem man in derselben für x nach einander die Werthe $x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$ einsetzt. Die einzelnen Substitutionen

werden durch den Index vermerkt und z. B. y_x gelesen: „y mit dem Index x". Der Ausdruck y_x, welcher das allgemeine Glied oder das Gesetz der Reihe genannt wird, ist zugleich das $x + 1$te Glied der Reihe. Die Summe der x ersten Glieder bezeichnen wir mit Σy_{x-1} und sie wird insgemein die Summenformel oder auch das summatorische Glied genannt.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise finden folgende Beziehungen zwischen den Gliedern der Hauptreihe und denen der Differenzreihen Statt:

$$
\begin{array}{llllllll}
x = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots\ldots & x-2, & x-1, \\
y = & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \ldots\ldots & y_{x-2} & y_{x-1}, \\
\text{Diff. I.} & \Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 \ldots\ldots & \Delta y_{x-2}, & & \\
\text{Diff. II.} & \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 \ldots\ldots & \Delta^2 y_{x-3}, & & & \\
\text{Diff. III.} & \Delta^3 y_0 & \Delta^3 y_1 \ldots\ldots & \Delta^3 y_{x-4}, & & & &
\end{array}
$$

Hieraus folgt

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1,$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2, \quad \Delta y_3 = \Delta y_2 + \Delta^2 y_2, \quad \Delta^2 y_3 = \Delta^2 y_2 + \Delta^3 g_2;$$

und ferner hieraus

$$y_0 = y_0,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$$y_x = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_0 + \ldots \Delta^x y_0.$$

Hiedurch ist die Aufgabe gelöst: Das allgemeine Glied einer Reihe aus dem ersten Gliede und seinen Differenzen zu bestimmen. Statt der Differenzen kann man auch die Glieder der Reihe selbst einführen, wie folgt:

$$y_x = y_0 + \frac{x}{1}(y_1 - y_0) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) + \ldots .$$

Um das summatorische Glied zu finden, addire man die Reihen für $y_0\ y_1\ y_2$ u. s. w., indem man die Reihe für y_x ausschließt, wie folgt:

$$\Sigma y_{x-1} = x \cdot y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 y_0 + \ldots .$$

Beispiel: Nr. 20. $\Sigma(n^3) = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$.

Die Summenformel ist stets von nächst höherem Grade als das allgemeine Glied.

§. 83.

2) Geometrische Progressionen.

Bedeutet a das Anfangsglied, t das Endglied, n die Anzahl der Glieder, e den Exponenten und s die Summe aller Glieder, so ist

$$\text{I. } t = a \cdot e_{n-1}.$$

$$\text{II. } s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e}.$$

1) Definition: Unter einer geometrischen Progression oder Reihe versteht man die Aufeinanderfolge derartig fortschreitender Zahlengrößen, daß der Exponent e des Verhältnisses je zweier auf einander folgender Glieder eine constante Größe ist, also

$$a, ae, ae^2, \ldots . a \cdot e^{n-2}, a \cdot e^{n-1}.$$

2) Lehrsatz: Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression wird gefunden, indem man die Differenz des $n + 1$ten und des ersten Gliedes durch die Differenz $e - 1$ dividirt. (Formel II.)

Beweis: Es ist

$$s = a + a \cdot e + a \cdot e^2 + a \cdot e^3 + \ldots . + a \cdot e^{n-1},$$

$$e \cdot s = \qquad a \cdot e + a \cdot e^2 + a \cdot e^3 + \ldots . + a \cdot e^{n-1} + a \cdot e^n.$$

Differenz $\quad es - s = a \cdot e^n - a = et - a,$

folglich $\quad s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{et - a}{e - 1}.$

26) Definition: Unter Kettenreihen versteht man solche Bruchreihen, in denen die Zähler der Glieder periodisch wiederkehren und die Nenner nach ganzen Potenzen einer beliebigen Zahl (Basis) fortschreiten.

Ist 10 die Basis, so ist die Kettenreihe ein periodischer Decimalbruch.

30) Die Kettenreihen werden in gleicher Weise aus Brüchen gebildet und in Brüche verwandelt, wie die Decimalbrüche. (Vergl. §. 30.)

32) Da die Reste bei der Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe kleiner sind als der Nenner n, so können nur $n - 1$ verschiedene Reste vorkommen.

33) Lehrsatz: Wenn Nenner und Zähler des Bruches zur Basis Primzahlen sind, so bilden die Zähler der Kettenreihe eine Periode, die gleich zu Anfang beginnt.

Beweis: Sei $\frac{\alpha}{\beta}$ der auf die kleinste Benennung gebrachte gemeine Bruch, p die Basis der Kettenreihe und p relativ prim zu α und β, also

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \ldots\ldots + \frac{l}{p^\lambda} + \frac{m}{p^{\lambda+1}} + \ldots\ldots + \frac{s}{p^\sigma} + \frac{m}{p^{\sigma+1}} + \ldots$$

(Periode $m, n, \ldots\ldots s$). Nun ist offenbar, wenn man die Reste mit $r_1, r_2, \ldots\ldots r_\lambda, r_{\lambda+1} \ldots\ldots r_\sigma$ u. s. w. bezeichnet,

$$\frac{\alpha \cdot p}{\beta} = a + \frac{r_1}{\beta},$$

$$\frac{r_1 \cdot p}{\beta} = b + \frac{r_2}{\beta},$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{\lambda-1} \cdot p}{\beta} = l + \frac{r_\lambda}{\beta},$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{\sigma-1} \cdot p}{\beta} = s + \frac{r_\sigma}{\beta}.$$

Damit nun nach den Zählern l und s die Periode eintrete, muß nothwendig $r_\lambda = r_\sigma$ sein, also

$$\frac{p(r_{\lambda-1} - r_{\sigma-1})}{\beta} = l - s = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Dies ist aber unmöglich, da nach der Voraussetzung β und p relativ prim, die Differenz der beiden Reste jedenfalls kleiner ist als β. Es muß daher $l = s$ und $r_{\lambda-1} = r_{\sigma-1}$ sein, also jeder vor l vorkommende Zähler wieder in der Periode erscheinen.

§. 84.

Aufgaben als Anwendung der geometrischen Progressionen, Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

13) Das Sophisma oder Paradoxon des Zeno. Dieser Trugschluß, womit Zeno die Irrealität der materiellen Welt zu beweisen sich abmühte, beruht darin, daß er die Demonstration der einzelnen Momente des Wettlaufs auf eine unendliche Zeit willkürlich ausdehnte, während doch die einzelnen Abschnitte in immer kleineren Zeitabschnitten erfolgen. Damit seine Darstellung mit der Wirklichkeit congruent gewesen wäre, hätte er jeden folgenden Abschnitt des Ereignisses in demselben Maße schneller vortragen müssen. Aristoteles suchte ihn dadurch zu widerlegen, indem er zeigte, daß Achilles die Unendlichkeit des Raumes, welche die Schildkröte ihm freilich voraus habe, durch die Unendlichkeit seiner Kraft (Geschwindigkeit) überwinde. Mathematisch macht sich die Sache einfach:

$$s = 1 + \frac{1}{12^1} + \frac{1}{12^2} + \ldots \text{ in } \textit{infin.} = 1\tfrac{1}{11} \text{ Zeiteinheiten.}$$

Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

14) Allgemeine Bemerkungen: Ein verzinsliches Capital steht auf Zinseszinsen, wenn die Zinsen desselben am Ende jeder Zeiteinheit zu dem Capital als ein integrirender Theil geschlagen werden, so daß Capital und Zinsen des ersten Jahres das verzinsliche Capital des zweiten Jahres werden; eben so wiederum dieses Capital sammt seinen Zinsen das verzinsliche Capital des dritten Jahres u. s. f.

Die Hauptaufgabe der Zinseszinsrechnung besteht darin, aus dem anfänglichen Capitale k, den Procenten p und der Zahl der

Jahre den Endwerth $k_{\prime}$ des Capitals zu berechnen. Der Endwerth bildet offenbar das letzte Glied einer geometrischen Progression, deren Anfangsglied den Werth des Capitals am Ende des ersten Jahres ausmacht und deren Exponent $\frac{100+p}{100}$ oder $1 + 0{,}01 \cdot p$ (Zinsfuß) ist, also

$$k_{\prime} = k(1 + 0{,}01p)^n.$$

19) $k_{\prime} = \frac{1}{360} \cdot 1{,}04^{1835} \cdot \log nat\, k_{\prime} = 1835\,(\log nat\, 26 - \log nat\, 25) - \log nat\, 360$. Nach Callet Tab. I. des *log* hyp. à 48 decimales ist:

log nat	26	=	3,25806 65380 21482 04547 07195 63023 49517 28808
log nat	25	=	3,21887 58248 68200 74920 15186 66452 37527 90512
log nat	360	=	5,88610 40314 50155 68564 29461 71445 76875 31371
log nat	*k′*	=	66,08390 46048 21022 96834 06990 36559 23642 42690

Multiplicirt man die neun ersten Ziffern von *log nat* $k_{\prime}$ mit dem Modul 0,43429448, so erhält man den entsprechenden *log vulg* 28,,69987496 ...., welcher zur Zahl $501043 \cdot 10^{23}$ gehört. Dividirt man die Zahl 50104,3 durch die Zahl $50103 = 57 \cdot 293 \cdot 3$, so erhält man zum Quotienten 1,000026, welcher wenig von dem Product $1{,}000021 \cdot 1{,}000005$ differirt. Hieraus folgt, daß, wenn von dem *log nat* $k_{\prime}$ der Logarithmus des Productes $57 \cdot 293 \cdot 3 \cdot 1000021 \cdot 1000005 \cdot 10^{12}$ subtrahirt wird, man einen Logarithmus erhält, welcher zwischen denen der Differenzen von Tab. II enthalten ist. Dieser Rest ist *log nat y*, wozu der Numerus nach der Formel

$$y = 1 + ly + \frac{1}{1 \cdot 2}(ly)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(ly)^3 + \dots.$$

berechnet wird. Diese Formel erhält man, wenn man in der bereits früher in §. 56 abgeleiteten Reihe

$$(1 + z)^x = 1 + l(1 + z) \cdot \frac{x}{1} + l(1 + z)^2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots.$$

y an die Stelle von $1 + z$ und 1 an die Stelle von x setzt.

Die Callet'schen Tafeln enthalten die gemeinen Logarithmen zu 61 Decimalen, die natürlichen zu 48 Decimalen und zwar aller Primzahlen von 1 bis 1100, so wie der Zahlen von 999980 bis 1000021 incl.

Es möge nun *log nat y* berechnet werden.

log nat	57	=	4,04305 12678 34550 15140 42726 68810 37924 18849
log nat	293	=	5,68017 26090 17067 30593 98402 62812 49819 02298
log nat	3	=	1,09861 22886 68109 69139 52452 36922 52570 46475
l	1000021	=	13,81553 15577 43777 19105 93292 94912 09114 94002
l	1000005	=	13,81551 55579 51774 14577 44591 45397 84930 81178
l	(10^{12})	=	27,63102 11159 28548 20821 58974 56212 37049 12132
	Summe	=	66,08390 43971 43826 69378 90440 65067 71408 54934

Subtrahirt man diesen Logarithmus von *log nat* $k_{,}$, so erhält man

$$ly = 0{,}00000\ 02076\ 77196\ 27455\ 16549\ 71491\ 52233\ 87756$$
$$(ly)^2 = 0{,}00000\ 00000\ 00043\ 12981\ 78524\ 58651\ 79865\ 62498$$
$$(ly)^3 = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 89570\ 79647\ 43071\ 73815$$
$$(ly)^4 = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 01860\ 18119\ 79863$$
$$(ly)^5 = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00038\ 63172$$

Hieraus erhält man weiter

$$y = 1{,}00000\ 02076\ 77217\ 83946\ 20740\ 47502\ 83433\ 95995$$

und

$$k' = 57 \cdot 293 \cdot 3 \cdot 10^{12} \cdot 1000021 \cdot 1000005 \cdot y =$$
$$5010\ 43130\ 88782\ 99804\ 59003\ 93545,\ 84023\ 28944 \text{ Thlr.}$$

25) Wird der Zinsfuß für kleinere Zeitabschnitte als ein ganzes Jahr geändert und für halb-, viertel- .... jährliche Zinszahlung die Hälfte, ein Viertel u. s. f. der jährlichen Zinsen genommen, so wächst der Endwerth des Capitals mit der Vermehrung der Zahlungstermine. Bei bedungenen monatlichen Zinseszinsen geht die Formel

$$k_{,} = k(1 + 0{,}01\ p)^{n} \text{ über in } k_{,} = k(1 + 0{,}01\ p/_{12})^{12n}.$$

Bei der Annahme einer Zinseszinsberechnung in Zeitabschnitten, die kleiner sind als jede angebbare Größe, nähert sich der Endwerth des Capitals einer bestimmten Größe, nämlich

$$k_{,} = k\left(1 + 0{,}01\frac{p}{\infty}\right)^{n\,.\,\infty}.$$

Man setze $0{,}01\ p : \infty = \omega$, so ist $\infty = 0{,}01\ p : \omega$ und

$$k_{,} = k(1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}\,.\,0{,}01\ p\,.\,n}.$$

Um den Werth $(1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}}$ zu finden, wenn ω unendlich klein ist, gehen wir zurück auf die im §. 56. 41) entwickelten Reihen

$$\text{I. } \log nat\,(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\dots$$

und

$$(1 + z^x = 1 + l(1 + z) \cdot \frac{x}{1} + [l(1 + z)]^2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots\dots$$

Man setze $z = \omega$ und $x = 1 : \omega$, so ist mit Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung

$$\log nat\,(1 + \omega) = \omega,$$

$$(1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots = e,$$

folglich

$$k_{\prime} = k \cdot e^{0{,}01\,p\,.\,n}.$$

26) Sind jährlich zu zahlende Zinsen bedungen, so behält genau genommen die allgemeine Formel für $k_{\prime}$ ihre Gültigkeit für jeden gebrochenen Werth von n, indem sie für die ganze Zeitdauer den Zinsfuß so bestimmt, daß der Endwerth des Capitals nach Ablauf des letzten ganzen Jahres dadurch keine Veränderung erleidet. Findet aber vor Ablauf desselben etwa nach dem $m$ten Theile eine wirkliche Zahlung Statt, so ist der Zinsfuß für diese Zeit gleich $\sqrt[m]{1 + 0{,}01\,p}$ und die Procente betragen

$$100 \sqrt[m]{1 + 0{,}01\,p} - 100,$$

also weniger und zwar mit Recht, da die Nutznießung für den noch übrigen Theil des Jahres dem Capitalisten zufällt. Um die Richtigkeit obiger Ausdrücke nachzuweisen, suchen wir den Zinsfuß, welcher sich auf ein ganzes Jahr bezieht, also auch p so umzuändern, daß bei wirklicher Zinszahlung nach dem $m$ten Theile des letzten Jahres der Endwerth des Capitals nach Ablauf des vollen Jahres unverändert bleibe. Seien x die unbekannten Procente, so würde das Capital k nach Ablauf des ganzen Jahres geworden sein

$$k\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100 + x}{100}\right)^{m'} = k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^{n+1},$$

wenn n ganze Jahre dem letzten vorangegangen sind. Hieraus folgt

$$\left(\frac{100 + x}{100}\right)^m = \left(\frac{100 + p}{100}\right),$$

$$1 + 0{,}01\, x = \sqrt[m]{1 + 0{,}01\, p},$$

$$x = 100 \sqrt[m]{1 + 0{,}01\, p} - 100.$$

Nichts desto weniger bestimmt die übliche Praxis für die vorliegenden Fälle den Endwerth des Capitals etwas anders und berechnet für den Bruchtheil des letzten Jahres die Zinsen nach einem diesem Bruchtheile proportionalen Zinsfuße, also zu hoch, wie sich auch aus den beiden angeführten Resultaten zu α) ergibt. Das Maximum der Abweichung findet für die Mitte des Jahres Statt.

48 α) und β) Wird ein Capital k jährlich um u vermindert oder vermehrt, so entsteht daraus

am Ende des ersten Jahres $k(1 + 0{,}01\, p) \mp u$,

am Ende des zweiten $k(1 + 0{,}01\, p)^2 \mp u(1 + 0{,}01\, p) \mp u$,

. . . .

am Ende des $n$ten Jahres $k(1 + 0{,}01\, p)^n \mp u[(1 + 0{,}01\, p)^{n-1} + (1 + 0{,}01\, p)^{n-2} + \ldots + 1]$

$$= k(1 + 0{,}01\, p)^n \mp u \frac{(1 + 0{,}01\, p)^n - 1}{(1 + 0{,}01\, p) - 1}.$$

58) Rentenrechnung: Unter Jahrrente versteht man insgemein eine bestimmte Summe r, welche Jemand am Ende bestimmter Zeitabschnitte, gewöhnlich jährlich, eine bestimmte Reihe von Jahren zu genießen hat. In der Regel bildet ein verzinsbares Capital die Grundlage. Unter dem baaren Werthe b der Rente r versteht man den Betrag einer Baarzahlung, welche dem Werthe aller Renten nebst ihren Zinseszinsen, also dem Endwerthe derselben auf den gegenwärtigen Zeitpunct bezogen, gleichkommt. Gemäß der Formel in Nr. 48 ist die Rentengleichung

$$b(1 + 0{,}01\, p)^n - r\, \frac{(1 + 0{,}01 p)^n - 1}{0{,}01\, p} = 0,$$

woraus sich der Baarwerth b ergibt, nämlich

$$b = \frac{r}{0{,}01 p}\left[\frac{(1 + 0{,}01\, p)^n - 1}{(1 + 0{,}01\, p)^n}\right].$$

62) **Mittlerer Zahlungstermin einer Rente.** Wenn der nominelle Werth der Rente oder das Ablösungs-Capital $n \cdot r$ auf einmal zur Zahlung gelangen soll, so gibt es einen mittleren Zahlungstermin. Um diesen zu berechnen, vergleiche man den Baarwerth der Rente mit dem Baarwerthe der Ablösungssumme:

$$\frac{n \cdot r}{(1 + 0{,}01\,p)^{x}} = \frac{r}{0{,}01\,p}\left[\frac{(1 + 0{,}01\,p)^{n} - 1}{(1 + 0{,}01\,p)^{n}}\right].$$

63) **Berechnung der Lebensversicherungen und Wittwenpensionen.** Die Beiträge zu den Lebensversicherungs-Anstalten und Wittwencassen werden in der Regel praenumerando entrichtet, wogegen die Auszahlung der Renten postnumerando geschieht, woraus den Wittwen- und Leibrentencassen offenbar ein Vortheil von den Zinsen eines vollen Jahres erwächst.

Sei B der jährliche Beitrag, m die Anzahl der Jahre, während welcher derselbe entrichtet werden soll, ferner r die Rente, welche er selbst oder ein Anderer nach Ablauf der m Jahre noch n Jahre genießen soll, so ist der Endwerth e der Beiträge nach Ablauf des $m$ten Jahres

$$e = B\,\frac{(1 + 0{,}01\,p)^{m} - 1}{0{,}01\,p}\,(1 + 0{,}01\,p).$$

Dieser Summe ist der Baarwerth der zu zahlenden Rente bezogen auf denselben Zeitpunct gleich. Mithin ist

$$b = \frac{r}{0{,}01\,p}\left[\frac{(1+0{,}01\,p)^{n} - 1}{(1+0{,}01\,p)^{n}}\right] = B\,\frac{(1 + 0{,}01\,p)^{m} - 1}{0{,}01\,p}\,(1+0{,}01\,p)$$

und darnach der Beitrag

$$B = \frac{r - \dfrac{r}{(1 + 0{,}01\,p)^{n}}}{[(1 + 0{,}01\,p)^{m} - 1]\,(1 + 0{,}01\,p)}$$

66) **Verwandlung der Jahrrenten in andere.** Man vergleiche den Baarwerth b der alten Rente mit dem $b_{\prime}$ der neuen, indem $b = b_{\prime}$ sein muß, also nach Nr. 58:

$$\frac{r \cdot [(1 + 0{,}01\,p)^{n} - 1]}{0{,}01\,p\,(1 + 0{,}01\,p)^{n}} = \frac{x}{\left(\sqrt[m]{1 + 0{,}01\,p} - 1\right)} \cdot \frac{\sqrt[m]{(1+0{,}01\,p)^{mt}} - 1}{\sqrt[m]{(1+0{,}01\,p)^{mt}}}.$$

B. Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

§. 85.

Kettenbrüche.

1) Erklärung: Man unterscheidet zwei Arten von Kettenbrüchen, absteigende und aufsteigende.

Die ersteren sind zuerst von Brounker, letztere von Kunze untersucht worden.

Ein absteigender Kettenbruch ist ein continuirlicher Bruch von der Form

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}} \quad \text{oder} \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}$$

also ein Bruch, dessen Zähler eine Ganze und dessen Nenner ein zweigliedriger Ausdruck ist, bestehend aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, der wieder zum Zähler eine Ganze und zum Nenner einen zweigliedrigen Ausdruck von derselben Beschaffenheit enthält u. s. f. Die Zahlen $\beta, \gamma, \delta \ldots$ heißen Partialzähler, die Zahlen $b, c, d \ldots$ Partialnenner, die Brüche $\frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c} \ldots$ oder $\frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots$ Partialbrüche oder Glieder des Kettenbruches.

Ein aufsteigender Kettenbruch ist ein continuirlicher Bruch von der Form

$$a + \cfrac{b + \cfrac{c + \cfrac{d + \ldots}{\delta}}{\gamma}}{\beta} \qquad a + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \ldots}{d}}{c}}{b}$$

von denen die zweite Form sich in die Reihe

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bcd} + \ldots$$

verwandeln läßt, wodurch sie mit den Theilbrüchen oder Theilbruchreihen von Heis (vergl. §. 86) zusammenfallen.

Wenn ein absteigender Kettenbruch eine begränzte Anzahl von Gliedern hat, so heißt er ein endlicher, sonst ein unendlicher Kettenbruch.

Wenn sich bei einem unendlichen Kettenbruche die Glieder in gleicher Reihenfolge immer wiederholen, so heißt er periodisch.

3) Anleitung: Um einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, suche man den größten gemeinschaftlichen Theiler von Zähler und Nenner und bilde einen Kettenbruch, dessen Partialzähler sämmtlich Einheiten und dessen Partialnenner die einzelnen Quotienten der Division sind.

Sei nämlich der gegebene Bruch $\frac{A}{B}$ ein unächter und weiter

$$\begin{aligned} A &= aB + C, \\ B &= bC + D, \\ C &= cD + E, \\ &\;\;\vdots \\ L &= lM + N, \\ M &= mN + 1, \end{aligned}$$

indem zuletzt immer der Rest 1 bleibt, wenn Zähler und Nenner relativ prim sind, so ist offenbar

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{B:C} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{C:D}}$$

u. s. f.

6) Wenn, wie im Folgenden immer vorausgesetzt wird, alle Glieder des Kettenbruches positiv sind, so wird (von den Ganzen immer abgesehen) der Werth des Kettenbruches größer oder kleiner, je nachdem die Anzahl seiner Glieder gerade oder ungerade ist.

7) Näherungswerthe oder Partialwerthe eines Kettenbruches sind diejenigen Werthe, welche derselbe annimmt, wenn man denselben hinter dem ersten, zweiten, dritten ..... $n$ten Partialnenner abbricht.

8) Lehrsatz: Der $m$te Partialwerth eines Kettenbruches wird aus den beiden vorhergehenden gefunden, indem man Zähler und Nenner des vorhergehenden Näherungswerthes mit dem Partialnenner des $m$ten Gliedes multiplicirt und zu diesen Producten beziehungsweise Zähler und Nenner des vorvorhergehenden oder $m-2$ten Partialwerthes addirt.

Beweis: Man entwickle zunächst die ersten Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}}$$

also

$$\text{I. } \frac{A}{A_{\prime}} = \frac{1}{a}, \quad \text{II. } \frac{B}{B_{\prime}} = \frac{b}{ab + 1}.$$

Setzt man in $\frac{B}{B_{\prime}}$ statt b den Werth $b + \frac{1}{c}$ ein, so wird

$$\text{III. } \frac{C}{C_{\prime}} = \frac{bc + 1}{(ab + 1)\,c + a}.$$

Substituirt man wiederum in $\frac{C}{C_{\prime}}$ statt c den Werth $c + \frac{1}{d}$, so erhält man

$$\text{IV. } \frac{D}{D_{\prime}} = \frac{(bc + 1)\,d + b}{[(ab + 1)\,c + a]\,d + (ab + 1)}.$$

Gehen dem Kettenbruch keine Ganze voraus und nimmt man noch als nullten Partialwerth den Bruch $\frac{0}{1}$ an, so erhält man folgende Reihe der ersten Näherungswerthe:

$$\begin{array}{lcccc} & \text{0.} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ \text{Nw.} & \frac{0}{1}, & \frac{1}{a}, & \frac{b \cdot 1 + 0}{b \cdot a + 1}, & \frac{c(b \cdot 1 + 0) + 1}{c(b \cdot a + 1) + a} \end{array} \text{ u. s. f.}$$

Gehen dem Kettenbruch a Ganze voraus und nimmt man als nullten Partialwerth den Bruch $\frac{1}{0}$ an, so erhält man folgende Reihe:

$$\begin{array}{lcccc} & \text{0.} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ \text{Nw.} & \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{b \cdot a + 1}{b \cdot 1 + 0}, & \frac{c(b \cdot a + 1) + a}{c(b \cdot 1 + 0) + 1} \end{array} \text{ u. s. f.}$$

Das Gesetz der Bildung der folgenden Näherungswerthe ist leicht erkennbar. Sind überhaupt von irgend einer Stelle an

$\frac{K}{K_\prime}, \frac{L}{L_\prime}, \frac{M}{M_\prime}$ drei aufeinander folgende Näherungswerthe und m der Partialnenner des letzten Gliedes, so soll der Behauptung gemäß sein

$$\frac{M}{M_\prime} = \frac{mL + K}{mL_\prime + K_\prime}.$$

Wenn das Bildungsgesetz nun allgemeine Gültigkeit hat, so muß sich als nächster Nw. ergeben

$$\frac{N}{N_\prime} = \frac{n \cdot M + L}{n \cdot M_\prime + L_\prime}.$$

Es wird derselbe aber auch aus dem vorhergehenden Nw. allein gefunden, dadurch daß man $m + \frac{1}{n}$ für m substituirt, also

$$\frac{N}{N_\prime} = \frac{\left(m + \frac{1}{n}\right) L + K}{\left(m + \frac{1}{n}\right) L_\prime + K_\prime} = \frac{n(mL + K) + L}{n(mL_\prime + K_\prime) + L_\prime}$$

$$\frac{N}{N_\prime} = \frac{nM + L}{nM_\prime + L_\prime}.$$

Der Satz gilt also allgemein.

Erweiterung: Ist der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{\alpha_\prime}{a_\prime + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \ldots,}}}$$

so ist allgemein

$$\frac{N}{N_\prime} = \frac{a_n M + \alpha_n L}{a_n M_\prime + \alpha_n L_\prime}.$$

9) **Lehrsatz:** Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{p_\prime}{q_\prime}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerthe, so ist jedesmal $pq_\prime - p_\prime q = \pm 1$, je nachdem $\frac{p_\prime}{q_\prime}$ mit Rücksicht auf die in Nr. 8, als die für gewöhnlich angenommene Form eines Kettenbruches ein Näherungswerth von gerader oder ungerader Ordnung ist.

Beweis: Derselbe kann hier wieder durch den Schluß von n auf $n+1$ geführt werden. (Kästner'sche Beweismethode.) Für die Gültigkeit der Annahme muß, wenn $\frac{p}{q}, \frac{p_\prime}{q_\prime}, \frac{p_{\prime\prime}}{q_{\prime\prime}}$ drei aufeinander folgende Näherungswerthe sind, der Behauptung nach

$$\text{I. } pq_\prime - p_\prime q = \pm 1,$$
$$\text{II. } p_\prime q_{\prime\prime} - p_{\prime\prime} q_\prime = \mp 1$$

sein. Sei m der letzte Partialnenner, also

$$p_{\prime\prime} = mp_\prime + p, \; q_{\prime\prime} = mq_\prime + q.$$

Folglich

$$p = p_{\prime\prime} - mp_\prime, \; q = q_{\prime\prime} - mq_\prime.$$

Substituirt man diese Werthe in I, so wird

$$(p_{\prime\prime} - mp_\prime)\, q_\prime - (q_{\prime\prime} - mq_\prime)\, p_\prime = \pm 1,$$

oder

$$p_{\prime\prime} q_\prime - p_\prime q_{\prime\prime} = \pm 1, \; p_\prime q_{\prime\prime} - p_{\prime\prime} q_\prime = \mp 1.$$

Die letztere Gleichung stimmt mit II überein. Nun gilt aber der Satz offenbar vom 1sten und 2ten Näherungswerthe, folglich auch vom 3ten, 4ten u. s. f. bis zu jedem beliebigen Näherungswerthe.

Zusatz: Aus demselben Satze folgt zugleich, daß p und q, $p_\prime$ und $q_\prime$ keine gemeinschaftliche Factoren haben, also die Näherungswerthe stets auf ihre kleinste Benennung gebracht sind.

10) Lehrsatz: Die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen ist gleich $\pm$ einem Stammbruch, dessen Nenner gleich dem Producte der Nenner der beiden Näherungswerthe ist.

Beweis: Dividirt man die Gleichungen in Nr. 9 durch das Product der beiden Nenner der Partialwerthe, so erhält man

$$\text{I. } \frac{p}{q} - \frac{p_\prime}{q_\prime} = \pm \frac{1}{q \cdot q_\prime}.$$

$$\text{II. } \frac{p_\prime}{q_\prime} - \frac{p_{\prime\prime}}{q_{\prime\prime}} = \mp \frac{1}{q_\prime \cdot q_{\prime\prime}}.$$

6) Lehrsatz: Der Unterschied zwischen dem vollständigen Werthe des Kettenbruches und zwischen einem Näherungswerthe ist immer kleiner als 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Näherungswerthes.

Beweis: Sei x der vollständige Werth des Bruches und $\frac{L}{L_{,}}, \frac{M}{M_{,}}, \frac{N}{N_{,}}$ drei aufeinander folgende Partialwerthe, so wird im Satze behauptet, daß abgesehen vom Vorzeichen

$$x - \frac{N}{N_{,}} < \frac{1}{N_{,}^{2}}$$

sei. Wenn nämlich

$$\frac{N}{N_{,}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{n}}} \qquad x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{n + p}}}$$

ist, wobei $p < 1$ sein muß, so ist

$$x = \frac{(n + p) M + L}{(n + p) M_{,} + L_{,}},$$

$$x - \frac{N}{N_{,}} = \pm \frac{(n + p)(MN_{,} - M_{,}N) + (LN_{,} - L_{,}N)}{N_{,}[(n + p) M_{,} + L_{,}]}.$$

Weil nun $\frac{N}{N_{,}} = \frac{nM + L}{nM_{,} + L_{,}}$, also $nNM_{,} + NL_{,} = nN_{,}M - N_{,}L$ ist, so wie auch $MN_{,} - M_{,}N = \pm 1$, so folgt hieraus weiter

$$LN_{,} = L_{,}N = \mp n.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck für $x - \frac{N}{N_{,}}$, so entsteht die Gleichung

$$x - \frac{N}{N_{,}} = \frac{\pm p}{N_{,}[(n + p) M_{,} + L_{,}]}.$$

Weil nun aber $nM_{,} + L_{,} = N_{,}$, also $(n + p) M_{,} + L_{,} \gtreqless N_{,}$ ist, so ist abgesehen vom Vorzeichen $\pm$ sicherlich

$$x - \frac{N}{N_{,}} \lesseqgtr \frac{p}{N_{,}^{2}},$$

und weil $p < 1$ ist, um so mehr

$$x - \frac{N}{N_{,}} < \frac{1}{N_{,}^{2}}.$$

Zusätze: a) Die Partialwerthe sind abwechselnd größer oder kleiner als der Werth des vollständigen Bruches und kommen ihm um desto näher, je mehr Glieder genommen werden.

Beispiel: Differenzentafel der Näherungswerthe von $\frac{24}{35}$.

Näherungs-werth.	$\triangle$	$x - \frac{N}{N'}$		Ungerade.	Gerade.
0. 0,0000		$x - \frac{0}{1}$	+ 0,6857		0. 0,0000
	+ 1,0000				
I. 1,0000		$x - \frac{A}{A'}$	− 0,3143	I. 1,0000	
	− 0,3333				
II. 0,6667		$x - \frac{B}{B'}$	+ 0,0190		II. 0,6667
	+ 0,0208				
III. 0,6875		$x - \frac{C}{C'}$	− 0,0018	III. 0,6875	
	− 0,0018				
IV. 0,6857					IV. 0,6857

b) Der Unterschied zweier aufeinander folgender Näherungswerthe ist größer als der Unterschied zwischen dem nachfolgenden und dem Werthe des ganzen Kettenbruches.

Beweis: Weil $N_{,} = nM_{,} + L_{,}$ ist, so ist $N_{,} > M_{,}$, mithin auch $x - \frac{N}{N_{,}} < \frac{1}{N_{,}N_{,}}$. Weil ferner $\frac{1}{M_{,}N_{,}} = \frac{M}{M_{,}} - \frac{N}{N_{,}}$, so ist ebenfalls vom Vorzeichen abgesehen

$$x - \frac{N}{N_{,}} < \frac{M}{M_{,}} - \frac{N}{N_{,}}.$$

c) Die Partialwerthe ungerader Ordnung nehmen beständig ab, die von gerader Ordnung zu.

12) Lehrsatz: Ein Näherungswerth kommt dem Werthe x des vollständigen Kettenbruches immer näher, als jeder andere Bruch $\frac{\alpha}{\gamma}$, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner des Näherungswerthes.

Behauptung: $\frac{\alpha}{\gamma} - x > \frac{M}{M_{,}} - x$, wenn $\gamma < M_{,}$.

Beweis: Nehmen wir im absoluten Sinne, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{N}{N_,} < \frac{M}{M_,} - \frac{N}{N_,} = \frac{1}{M_, N_,},$$

so müßte sein

$$\alpha N_, - \gamma N < \frac{\gamma}{M_,}.$$

Da nun die rechte Seite ein Bruch, die linke eine ganze Zahl ist, so kann diese Ungleichung nur dann bestehen, wenn entweder $\alpha N_, - \gamma N = 0$ oder $\gamma > M_,$ ist. Aus der ersten Annahme würde folgen

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{N}{N_,},\ \gamma = N_,.$$

Dieses aber sowohl als auch die Ungleichung $\gamma > M_,$ streiten gegen die Annahme $\gamma < M_, < N_,$.

Wenn sich nun schon zwischen $\frac{M}{M_,}$ oder $\frac{N}{N_,}$ keine solche Brüche einschalten lassen, so ist dies noch weniger möglich zwischen $\frac{N}{N_,}$ oder $\frac{0}{0_,}$ u. s. w., also überhaupt nicht zwischen einem beliebigen Näherungswerthe $\frac{M}{M_,}$ und dem vollständigen Werthe x.

Zusatz: Zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen $\frac{M}{M_,}$ und $\frac{N}{N_,}$, wobei also $M_, < N_,$ ist, lassen sich $n - 1$ Näherungswerthe einschalten, deren Nenner sämmtlich $> M_,$ und $< N_,$ sind. Ist nämlich n der auf m folgende Partialnenner, so sind die eingeschalteten Brüche

$$\frac{\alpha}{\alpha_,} = \frac{1 \cdot M + L}{1 \cdot M_, + L_,},\ \frac{\beta}{\beta_,} = \frac{2 \cdot M + L}{2 \cdot M_, + L_,},\ \frac{\gamma}{\gamma_,} = \frac{3 \cdot M + L}{3 \cdot M_, + L_,},$$

$$\ldots \frac{\mu}{\mu_,} = \frac{(n-1)\,M + L}{(n-1)\,M_, + L_,},\ \frac{N}{N_,} = \frac{n\,M + L}{n\,M_, + L_,},$$

wo der Nenner irgend eines Bruches

$$r \cdot M_, + L_, < nM_, + L_,$$

$$r\,M_, + L_, > M_, + L_,$$

§. 86.

Theilbruchreihen.

Erklärung: Eine Theilbruchreihe ist eine Reihe von Stammbrüchen, von welchen jeder folgende ein aliquoter Theil des unmittelbar vorhergehenden ist.

11) Regel: Um die periodischen Theilbruchreihen zu summiren, verwandle man sie entweder in eine geometrische Progression oder führe sie auf eine algebraische Gleichung zurück.

§. 87.

Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen und zur Auffindung der Quadratwurzeln und Logarithmen. Berechnung der Quadrat-, Kubikwurzeln u. s. w. und der Logarithmen durch Theilbruchreihen.

1) Auflösung: Um die unbestimmte Gleichung

$$\text{I. } ax - by = 1$$

aufzulösen, verwandele man den Quotienten $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch $\frac{N}{N_{\prime}}$ und suche den letzten Näherungswerth $\frac{M}{M_{\prime}}$. Da nun

$$Nx - N_{\prime}y = 1,$$
$$NM_{\prime} - N_{\prime}M = \pm 1$$

ist, so erhält man offenbar zwei Werthe x und y, welche der gegebenen Gleichung genügen; und zwar

$$x = M_{\prime} \text{ und } y = M, \text{ wenn } NM_{\prime} - N_{\prime}M = +1,$$
$$x = -M_{\prime} \text{ und } y = -M_{\prime} \text{ wenn } NM_{\prime} - N_{\prime}M = -1.$$

2) Auflösung: Der Gleichung

$$\text{II } ax + by = 1$$

genügen offenbar die entgegengesetzten Werthe von y in I.

3) Auflösung: Ist die unbestimmte Gleichung von der Form

$$ax \mp by = c = Nx \mp N_{\prime}y,$$

so braucht man die Gleichung $NM_{\prime} - N_{\prime}M = \pm 1$ nur mit c

zu multipliciren. Auch kann man alsdann noch zu x und y ein allgemeines Glied hinzufügen.

Erster Fall: $Nx - N_{\prime}y = c$.

Da ebenfalls

$$c \cdot (NM_{\prime} - N_{\prime}M) = \pm c$$

oder

$$N(\pm M_{\prime} \cdot c) - N_{\prime}(\pm M \cdot c) = c$$

ist, so kann letztere Gleichung auf die allgemeinere Form

$$N(N_{\prime} \cdot n \pm M_{\prime}c) - N_{\prime}(N \cdot n \pm Mc) = c$$

gebracht werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Also ist

$$x = \pm M_{\prime}c + N_{\prime}n, \; y = \pm Mc + Nn.$$

Zweiter Fall: $Nx + N_{\prime}y = c$.

Man bringe die Gleichung $NM_{\prime} - N_{\prime}M = \pm 1$ auf die Form

$$N(N_{\prime} \cdot n \pm M_{\prime}c) + N_{\prime}(-Nn \mp Mc) = c,$$

woraus folgt

$$x = \pm M_{\prime}c + N_{\prime}n, \; y = \mp Mc - Nn.$$

11) Anleitung: Ist a die gegebene Zahl und ihr Logarithmus zur Basis 10

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ldots}},$$

so setze man

$$a = 10^x = 10^{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ldots}}}$$

Man suche zunächst, wie viel ganze Mal 10 in a als Factor enthalten ist. Es sei α. Alsdann dividire beiderseits durch 10^α und potenzire die Gleichung mit $\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ldots}}$,

so erhält man

$$\left(\frac{a}{10^\alpha}\right)^{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ldots}}} = 10.$$

Nun suche man, wie oft $a : 10^\alpha$ in 10 als Factor enthalten ist. Es sei β. Man dividire abermals u. s. f.

Sechster Abschnitt.

Permutationen, Combinationen, Variationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurirte Zahlen, Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 88.

Permutationen.

1) Definition: Unter einer Gruppe oder Complexion versteht man eine beliebige, gewöhnlich reihenartige Zusammenstellung beliebig vieler und ihrer sonstigen Beschaffenheit nach gleichgültiger Dinge als Buchstaben, Ziffern, Personen und dergl. mehr. Die zusammengestellten Objecte heißen Elemente.

Den Begriff des Zeigers (Index) stellen wir dahin fest, daß er die jedesmalige Anzahl anzeigt, wie viele von den gegebenen Elementen zu einer Complexion verwendet werden sollen. Unter Basis versteht man die Gesammtheit der gegebenen Elemente. Sollen beispielsweise von n gegebenen Elementen $a, b, c, \ldots\ldots n$ immer nur r Elemente in allen möglichen Ordnungen zusammengestellt werden, so bezeichnet man dieses mit $\underset{r}{V(n)}$ und lies't „Anzahl der Variationen von n Elementen (oder von der Basis n) mit dem Index r". *) Bei den Permutationen ist die Basis mit dem Index übereinstimmend.

Die Bezeichnung der Elemente geschieht durch die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets oder durch Ziffern.

Ein Element, welches im Alphabet oder im Ziffernsystem einem

---

*) Die Bezeichnung $\underset{r}{V(n)}$ ist von Heis. Die Schreibart ist bei den verschiedenen Algebristen verschieden. Bei

Wiegand $\underset{a,\, b,\, c\, \ldots\, n}{Vr}$ (r Klassenexponent)

Eytelwein $\underset{(abc\, \ldots)}{Vr}$ (r Versetzungsexponent).

Tellkampf $\overset{r}{V}(a, b, c \ldots)$

Crelle nVr.

anderen der Ordnung nach vorangeht, heißt ein Element von niederem Range, jedes folgende ist von höherem Range als eines der vorhergehenden.

Eine Complexion wird eine gutgeordnete genannt, wenn die Elemente von der Linken zur Rechten so aufeinander folgen, daß kein höheres einem niederen vorangeht.

Eine Complexion höheren Ranges ist eine solche, welche von irgend einer Stelle an ein Element höheren Ranges enthält als die andere.

So ist z. B. von den Complexionen

$$bcfkm, \quad bckfm$$

die zweite von höherem Range als die erste.

2) Permutation: Werden n Elemente auf alle mögliche Art in ihrer gegenseitigen Reihenfolge mit einander verwechselt, so daß auf jede Complexion eine andere von höherem Range folgt, so nennt man diese Operation Permutiren oder Versetzen. Jede Gruppe heißt Permutation und die Anzahl der Permutationen (Versetzungszahl) mird mit $P(n)$ *) bezeichnet.

4) Anleitung: Um alle Permutationen einer gutgeordneten Complexion zu bilden,

a) permutire man zuerst die beiden letzten Elemente;

b) suche man von rechts nach links das erste Element, welches als niederes einem höheren vorangeht;

c) suche man nach rechts fortschreitend zu jenem niederen Elemente das nächst höhere und vertausche es mit dem niederen. Während die Elemente zur Linken ihre Stellung unverändert beibehalten, lasse man das niedere Element mit den übrigen zur Rechten in ihrer natürlichen Ordnung folgen. (Lexikographische Anordnung.) Man fährt hiermit so lange fort, bis man zu einer Complexion gelangt, in welcher die Elemente in umgekehrter Ordnung als wie in der ersten Complexion aufeinander folgen.

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n = n!. \text{ (gelesen: } n \text{ zur Facultät).}$$

7) Die vorige Regel behält auch dann ihre Gültigkeit, wenn unter den n Elementen beliebig viele gleiche vorkommen, wobei zu beachten ist, daß die gegenseitigen Versetzungen gleicher Elemente keine verschiedenen Permutationen bilden.

---

*) Die Schreibart variirt mit P_n, $P_{a, b, c \ldots\ldots n}$, $P_{(abc \ldots\ldots mn)}$.

§. 89.

Combinationen und Variationen.

1) Combination: Wenn aus n Elementen alle möglichen, aber eine gewisse Anzahl von Elementen enthaltenden gutgeordneten Complexionen gebildet werden, so daß in keiner derselben alle dieselben Elemente wieder vorkommen, so nennt man diese Operation Combiniren.

Je nachdem in den Zusammenstellungen (Combinationen) jedes Element entweder nur einmal oder so oft vorkommt, als es der Classenexponent zuläßt, unterscheidet man Combinationen ohne oder mit Wiederholungen. Die Anzahl r der in jeder Verbindung enthaltenen Elemente bestimmt die Klasse, und es wird die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholung durch $\underset{r}{C}(n)$, mit Wiederholung durch $^{w}\underset{r}{C}(n)$ bezeichnet.

3) a) Die Unionen der Elemente a, b, c, d, e, f sind

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f.$$

Die Anzahl $\underset{1}{C}(a, b, \ldots f) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \frac{6}{1}.$

b) Die Amben sind

$$\begin{matrix} ab & ac & ad & ae & af \\ & bc & bd & be & bf \\ & & cd & ce & cf \\ & & & de & df \\ & & & & ef \end{matrix}$$

Die Anzahl $\underset{2}{C}(a, b, \ldots f) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}.$

c) Die Ternen sind

$$\begin{matrix} abc & abd & abe & abf \\ & acd & ace & acf \\ & & ade & adf \\ & & & aef \\ & bcd & bce & bcf \\ & & bde & bdf \\ & & & bef \\ & & cde & cdf \\ & & & cef \\ & & & def \end{matrix}$$

Die Anzahl $\underset{3}{C}(a, b, \ldots f) = 10 + 6 + 3 + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

4) **Anleitung:** a) Die **Unionen** der 4 Elemente sind

$$a \quad b \quad c \quad d$$

Die Anzahl $^{w}\underset{1}{C}(a, b, c, d) = 1 + 1 + 1 + 1 = \frac{4}{1}.$

b) Die **Amben** sind

aa	*ab*	*ac*	*ad*
	bb	*bc*	*bd*
		cc	*cd*
			dd

Die Anzahl $^{w}\underset{2}{C}(a, b, c, d) = 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}.$

c) Die **Ternen** sind

aaa	*aab*	*aac*	*aad*
	abb	*abc*	*abd*
		acc	*acd*
			add
	bbb	*bbc*	*bbd*
		bcc	*bcd*
			bdd
		ccc	*ccd*
			cdd
			ddd

Die Anzahl $^{w}\underset{3}{C}(a, b, c, d) = 10 + 6 + 3 + 1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

Die Anzahl $^{w}\underset{4}{C}(a, b, c, d) = 20 + 10 + 4 + 1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$

8) *a*) $\underset{r}{C}(n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots r} = \binom{n}{r}.$

Beweis: a) Die Anzahl der Combinationen zur **ersten** Klasse ist offenbar der Anzahl der gegebenen Elemente gleich, also

$$\underset{1}{C}(n) = \frac{n}{1} = \binom{n}{1}.$$

b) Die Anzahl der Combinationen zur **zweiten** Klasse erhält man, indem man jede Combination der vorhergehenden Klasse mit allen Elementen verbindet, welche sie selbst nicht enthält, also hier mit $n - 1$ Elementen. Auf diese Art erhält man jede Combination offenbar eben so oft wieder, als die Nummer der Klasse,

z. B. ab und ba, welche nur für eine zu rechnen ist. Deßhalb muß das Product $n(n-1)$ noch durch 2 getheilt werden, also

$$\underset{2}{C}(n) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2}.$$

c) $\underset{3}{C}(n)$ wird ferner erhalten, indem man jede Combination der vorhergehenden Klasse mit allen Elementen verbindet, welche sie nicht enthält, also mit $n-2$. Da so jede Complexion dreimal mit denselben Elementen vorkommt, so ist noch durch 3 zu dividiren, indem z. B. von den Complexionen abc, acb, bca nur die erste als gutgeordnete gerechnet wird. Mithin ist

$$\underset{3}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n}{3}.$$

d) Indem man von der vorhergehenden Klasse auf die nächstfolgende schließt, ergibt sich die allgemeine Gültigkeit des Satzes.

8) β) $${}^{w}\underset{r}{C}(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Beweis: a) Die Anzahl der Combinationen zur ersten Klasse mit Wiederholungen ist offenbar der Anzahl der Elemente gleich, also

$${}^{w}\underset{1}{C}(n) = \frac{n}{1} = \binom{n}{1}.$$

b) Um ${}^{w}\underset{2}{C}(n)$ zu bestimmen, erwäge man, daß zu den $\binom{n}{2}$ Combinationen ohne Wiederholungen noch n andere mit Wiederholungen hinzukommen, also

$${}^{w}\underset{2}{C}(n) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n = \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} = \binom{n+1}{2}.$$

c) Um ${}^{w}\underset{3}{C}(n)$ zu erhalten, läßt sich zeigen, daß, wenn man die Elemente der Complexionen mit Wiederholungen der Reihe nach um 0, α, β vermehrt und α wie β so wählt, daß statt n nun $n+2$ verschiedene Elemente zum Vorschein kommen, und sich stets die Ungleichungen $0 < \alpha < \beta$, $a < b < c$ vergegenwärtigt, man die Combinationen ohne Wiederholung von $n+2$ Elementen zur dritten Klasse erhält. Folglich ist

$${}^{w}\underset{3}{C}(n) = \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n+2}{3}.$$

d) Allgemein läßt sich zeigen, daß, wenn man die Elemente der Combinationen **mit** Wiederholungen der Reihe nach von dem Elemente niedrigsten Ranges an um 0, 1, 2 .... $(r - 1)$ vermehrt, man neue Combinationen **ohne** Wiederholung zur $r$ten Klasse von $n + r - 1$ Elementen erhält und zwar die vollständige Anzahl derselben.

Zusatz: Ein Rückblick auf die Anordnung der Complexionen in Nr. 4 belehrt, wie sonst noch die Anzahl ${}^{w}C_{r}(n)$ sich bestimmen läßt. Bleiben wir bei dem Beispiele $n = 4$, $r = 3$ stehen, so erkennt man auf den ersten Blick, daß

1) a allen Complexionen von ${}^{w}C_{2}(n)$ vorangeht.
2) b allen Complexionen mit Ausnahme des ersten Elements.
3) allen Complexionen mit Ausnahme der beiden ersten Elemente u. s. f.

Hieraus folgt

$${}^{w}C_{3}(4) = {}^{w}C_{2}(4) + {}^{w}C_{2}(3) + {}^{w}C_{2}(2).$$

Für n Elemente

$${}^{w}C_{3}(n) = {}^{w}C_{2}(n) + {}^{w}C_{2}(n-1) + \ldots\ldots + {}^{w}C_{2}(2).$$

Allgemein

$${}^{w}C_{r}(n) = {}^{w}C_{r-1}(n) + {}^{w}C_{r-1}(n-1) + \ldots\ldots + {}^{w}C_{r-1}(r-1).$$

9) $C_{r}(n) = C_{n-r}(n)$.

Beweis: Ist $n - r > r$, so ist gemäß Nr. 8, α)

$$C_{n-r}(n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots.\ [n-(n-r)+1]}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots.\ (n-r)}$$

$$= \frac{n(n-1)\ \ldots.\ (n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ \ldots.\ (r+2)(r+1)}{1 \cdot 2\ \ldots\ldots\ldots.\ r \cdot (r+1)\ (r+2)\ \ldots.\ (n-r-1)\ (n-r)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots.\ (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ldots\ldots.\ r} = C_{r}(n).$$

Ist $n - r < r$, so braucht man $C_{n-r}(n)$ nur mit dem der Einheit gleichen Quotienten

$$\frac{r\,(r-1)\ \ldots.\ (n-r+2)\,(n-r+1)}{(n-r+1)\,(n-r+2)\ \ldots.\ (r-1)\,r}$$

zu multipliciren.

15) Variation: Wird aus jeder von mehreren abgesonderten Elementenreihen, so oft es angeht, ein einziges Element zur Bildung der Complexionen verwendet, so nennt man diese Operation Variiren. Die Anzahl der Variationen wird gefunden, indem man die Elementenmengen der einzelnen Reihen miteinander multiplicirt.

18) Sind die Elementenreihen gleich, so ist die Variation eine mit Permutation verbundene Combination, welche mit und ohne Wiederholung vorgenommen werden kann. Dabei wird die Basis n durch die Anzahl der Elemente jeder Reihe, der Index r durch die Anzahl der Elementenreihen bestimmt.

20) $^{w}\underset{r}{V}(n) = n^{r}$.

Beweis: Gemäß 15) wird die Anzahl der Variationen gefunden, indem man die Elementenmengen der einzelnen Reihen miteinander multiplicirt. Da die Reihen dieselben Elemente haben, so ist dies eine Variation mit Wiederholung, also

$$^{w}\underset{r}{V}(n) = n \cdot n \cdot n \, \ldots \, \underset{(r)}{n} = n^{r}.$$

21) $\underset{r}{V}(n) = \underset{r}{C}(n) \cdot P(r)$ ·

Beweis: Läßt man die Wiederholungen weg, so bleiben nur die Permutationen der Combinationen ohne Wiederholung übrig.

23) Combinationen und Variationen der natürlichen Zahlen mit bestimmten Quersummen. Werden die zu Combinationen zu verwendenden Elemente durch die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3 .... n ausgedrückt, so kann die Aufgabe gestellt werden, solche Complexionen auszuwählen, daß die Quersumme der Elemente jeder Complexion eine bestimmte Größe habe. In der Regel sind Verbindungen mit Wiederholungen gemeint. Die Bezeichnung für Combinationen ist

$$^{\sigma}\underset{r}{C'}(n) \text{ oder } ^{\sigma}\underset{1,\,2,\,3,\,\ldots\,n}{C'r}$$

Für Variationen ist die Bezeichnung

$$\overset{s=n}{V}(r) \text{ oder } ^{\sigma}\underset{r}{V'}(n) \text{ oder } ^{\sigma}\underset{1,\,2,\,3,\,\ldots\,n}{V'r} \quad .$$

25) $\overset{s=n}{V}(2) = \frac{n+1}{1} = \binom{n+1}{1}$.

Beweis: Die Verbindungen sind $[0+n]$, $[1+(n-1)]$, ... $[n+0]$.

26) $\alpha)$ $\overset{S=n}{V}(3) = \binom{n+2}{2}$.

Beweis: Man findet die Anzahl, wenn man vor jeder Complexion von $\overset{S=n}{V}(2)$ Null setzt, vor jeder Complexion von $\overset{S=n-1}{V}(2)$ eine 1, vor jeder Complexion von $\overset{S=n-2}{V}(2)$ eine 2 u. s. f., endlich vor $\overset{S=0}{V}(2)$ ein n. Mithin ist gemäß Nr. 8 $\beta)$ Zusatz

$$\overset{S=n}{V}(3) = \binom{n+1}{1} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{1}{1} = \binom{n+2}{2}.$$

$$\overset{S=n}{V}(4) = \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{n+3}{3}.$$

u. s. f.

§. 90.

Aufgaben als Anwendungen der Permutations-, Combinations- und Variations-Rechnung.

1) Folgende Permutationen des Wortes Roma geben einen Sinn:

roma lat. Name Roms.

roma hebr. רוֹמָה Erhebung; auch adv. hoch, stolz.

roma hebr. רְאֵמָה die sich Erhebende, partic. von רָאַם

roam hebr. רְאָם ihr Prophet von רָאָה sehen.

raom hebr. רְעוֹם toben, von רָעַם und רָאוֹם sich erheben.

ramo lat. vom Aste.

orma ungar. ein Gipfel.

oram lat. die Küste, accus. von ora.

omra arab. die Emire.

omra hebr. אֹמְרָה die Sprechende, von אָמַר.

omar arab. ein Personenname.

mora lat. der Verzug.

mora hebr. מֹרָה die Aufrührerische, partic. von מָרָה.
mora hebr. מוֹרָה Scheermesser.
mora hebr. מֹרְאָה die sich Erhebende, von מָרָא.
moar syr. der Käufer.
maro lat. ein Personenname.
maro hebr. מָרוֹ rebellando, inf. abs. von מָרָה.
maor hebr. מָאוֹר das Licht.
maor hebr. מָעוֹר Nacktheiten.
arom hebr. עָרוֹם nackt; auch inf. abs. von עָרַם klug sein.
armo lat. ich bewaffne.
amro syr. Wolle.
amor hebr. אָמוֹר durch Sprechen inf. abs. von אָמַר.
amor lat. Name.

§. 91.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) Erklärung: Man spricht oft von der größeren oder geringeren Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines von mehreren möglichen Ereignissen im Vergleich mit den übrigen. Dies hat offenbar seinen Grund darin, daß wir durch den Glauben an die Beständigkeit der Naturgesetze und durch die aus ihm geschöpften Erfahrungen geleitet werden, die öftere Wiederholung solcher Ereignisse zu erwarten, deren Eintreten die hauptsächlich mitwirkenden Ursachen (Naturkräfte) besonders günstig sind. Je einfacher und unabhängiger diese Ursachen sind, um so mehr nähern wir uns dem höchsten Grade der Wahrscheinlichkeit, der Gewißheit. Die Ereignisse, um welche es sich handelt, sind entweder solche des Zufalls, d. h. der gemeinsamen Wirkung einer Reihe von Ursachen, deren Zusammenhang uns versteckt ist, oder solche, die durch irgend welche willkürliche Handlungen herbeigeführt werden.

In letzterem Falle kann natürlich nur dann von einer Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines möglichen Ereignisses die Rede sein, wenn alles vermieden wird, was das Zufällige vermindert.

Soll z. B. die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Glückspiele angewendet werden, so dürfen diese nicht Spiele der Geschicklichkeit sein. Durch möglichst unregelmäßige, dem Bewußtsein entzogene Bewegung wird die Vorherbestimmung auf das Gebiet des Zufalles geführt, werden die überhaupt möglichen zu gleich möglichen.

Demgemäß versteht man unter mathematischer Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses das Verhältniß der demselben günstigen Fälle zu den möglichen. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist ein ächter Bruch, welcher in Null übergeht, wenn das erwartete Ereigniß überhaupt unmöglich ist; und welcher der Einheit gleich wird, wenn das Nichteintreffen unmöglich ist, wodurch Gewißheit entsteht. Es ist mithin die Einheit das Symbol der Gewißheit, die Null das der Unmöglichkeit.

Wenn unter $m + n$ gleichmöglichen Fällen n Fälle günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß eintreffe $\frac{n}{m+n}$, die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintreffe oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n}$.

Unter geringer Wahrscheinlichkeit versteht man eine solche, welche kleiner ist als die entgegengesetzte, also eine solche, welche kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Die Theorie stimmt um so mehr mit der Erfahrung überein, je öfter die Versuche wiederholt werden. Wenn dies unter keinen Umständen der Fall ist, so läßt der von der Regel abweichende Erfolg auf die Existenz verborgener Ursachen schließen, welche den Zufall verringern.

Es gibt drei verschiedene Arten der Wahrscheinlichkeit: eine absolute, eine relative und eine zusammengesetzte.

Die absolute Wahrscheinlichkeit des Eintretens irgend eines Ereignisses ist das Verhältniß aller günstigen Fälle zu allen möglichen. Sind $w, w_{,}, w_{,,} \ldots$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten von ebensoviel verschiedenen erwarteten Ereignissen, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß eines oder das andere derselben eintrete, wenn man dieselben addirt, also

$$W = w + w_{,} + w_{,,} + \ldots$$

6) Alle möglichen Fälle, welche bei dem Werfen mit mehreren Würfeln vorkommen können, werden bestimmt durch die

Anzahl der Variationen von 6 Elementen zur $p$ten Klasse mit Wiederholungen, wo p die Anzahl der Würfel bezeichnet, also

$$ {}^{w}\underset{p}{V}(6) = 6^{p}. $$

Alle günstigen Fälle werden bestimmt durch die Anzahl der Variationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur Quersumme σ zur $p$ten Klasse, also

$$ \underset{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6}{{}^{\sigma}V'_{p}} = \binom{\sigma - 1}{p - 1} \text{ wenn } \sigma \leqq \frac{7p}{2} \text{ ist;} $$

und

$$ {}^{\sigma}\underset{p}{V'}(6) = \binom{\frac{7}{2}p - n - 1}{p - 1} \text{ wenn } \sigma > \tfrac{7}{2}\, p \text{ ist.} $$

13) Die relative Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines unter mehreren möglichen Ereignissen ist das Verhältniß seiner absoluten Wahrscheinlichkeit zur Summe der Wahrscheinlichkeiten überhaupt. Allgemein ist

$$ W = \frac{w}{w + w_{\prime} + w_{\prime\prime} + \ldots.} $$

16) Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit wird von dem Zusammentreffen oder der Aufeinanderfolge mehrerer Ereignisse gebraucht.

Ist $w = \frac{p}{q}$, $w_{\prime} = \frac{r}{s}$, $w_{\prime\prime} = \frac{t}{u}$ u. s. f., so können p Fälle des ersten Ereignisses mit r des zweiten, mit t des dritten u. s. w. zusammentreffen. Die Anzahl dieser Variationen ist gemäß §. 90, 17) $p \cdot r \cdot t \ldots.$ für die erwarteten, $q \cdot s \cdot u \ldots.$ für alle möglichen Ereignisse. Mithin ist

$$ W = \frac{p \cdot r \cdot t \ldots}{q \cdot s \cdot u \ldots} = w \cdot w_{\prime} \cdot w_{\prime\prime} \ldots. $$

20) Gemäß Nr. 6 ist die Wahrscheinlichkeit $p - m$ mal a, m mal b zu werfen ohne Rücksicht auf die Ordnung

$$ W = \binom{p}{m} \cdot \left[\frac{\binom{a-1}{p-1}}{6^{p}}\right]^{p-m} \times \left[\frac{\binom{b-1}{p-1}}{6^{p}}\right]^{m} \text{ für } a \leqq \tfrac{7}{2}\, p. $$

Die Formel hat zur Bedingung ihrer Gültigkeit $a - p + 1 \leqq 6$.

22) Bei **wiederholten Versuchen** ist für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten folgendes zu beachten. Ist a die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von A, b die von B, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß

A $n$mal nach einander eintreffe, gleich a^n,

A $(n-1)$mal, B 1 mal irgendwann eintreffe, $\frac{n}{1} \cdot a^{n-1} b$,

A $(n-2)$mal, B 2mal irgendwann eintreffe, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$,

u. s. f. **ohne vorherbestimmte Ordnung**. Bei vorher bestimmter Ordnung fallen die Coefficienten weg. Da für **zwei** Ereignisse $a + b = 1$ ist, so ist

$$(a+b)^n = 1 = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b^n.$$

In dieser Entwicklung bezeichnet das $r$te Glied, daß man bei n Wiederholungen und Versuchen ohne vorherbestimmte Ordnung $n - r + 1$ mal das Ereigniß A, $r - 1$ mal das Ereigniß B zu erwarten habe mit der Wahrscheinlichkeit

$$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}.$$

Der Ausdruck ohne den Coefficienten $\binom{n}{r-1}$ dagegen dasselbe mit vorherbestimmter Ordnung.

Kommt die Bestimmung „wenigstens" hinzu, so gelten alle vorangehenden Glieder mit; für die Bedingung „höchstens" alle nachfolgenden.

§. 92.

Binomischer und polynomischer Lehrsatz.

2) Das Product aus den α Gliedern ist nach Berechnung der Summe aller Combinationen der Elemente $a, b, c \ldots.$ aller Klassen gleich

$$x^{\alpha} \pm x^{\alpha-1} \underset{1}{SC}(abc \ldots m) + x^{\alpha-2} \underset{2}{SC}(abc \ldots m)$$
$$\pm x^{\alpha-3} \underset{3}{SC}(abc \ldots m) + \ldots.$$

6) **Binomischer Lehrsatz:** Man gelangt zur Entwicklung der Potenz eines Binoms mit ganzen positiven Exponenten, wenn man in der Entwicklung des Products von n Binomialfactoren

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \ldots . (x \pm m)$$

a an die Stelle von x und $a = b = c = \ldots . = b$ setzt.

Demgemäß ist

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots .$$

Vergleiche die Binomial-Coefficiententafel in §. 40. Die Binomial-Coefficienten sind die Coefficienten

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots . \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

18) **Polynomischer Lehrsatz:** Derselbe ergibt sich, wenn man das Polynom zuerst in ein Binom verwandelt, die nach der Entwicklung noch vorhandenen Polynome abermals in Binome u. s. w., bis keine Polynome mehr vorkommen.

Allgemein ist

$$(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \ldots .)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b \cdot x$$

$$+ \left[\binom{n}{1} a^{n-1} c + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2\right] x^2$$

$$+ \left[\binom{n}{1} a^{n-1} d + 2\binom{n}{2} a^{n-2} bc + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3\right] x^3$$

$$+ \left[\binom{n}{1} a^{n-1} e + 2\binom{n}{2} a^{n-2} bd + \binom{n}{2} a^{n-2} c^2 + 3\binom{n}{3} a^{n-3} b^2 c + \right.$$

$$\left.\binom{n}{4} a^{n-4} b^4\right] x^4 + \ldots .$$

20) **Lehrsatz:** Der für ganze positive Exponenten in Nr. 6 abgeleitete binomische Lehrsatz gilt auch für ganze negative, gebrochene positive und gebrochene negative Exponenten.

Beweise: Diese können entweder mittels des Identitätsbeweises (Euler) oder mittels der bereits §. 56, 41) angewandten Methode der unbestimmten Coefficienten geführt werden.

I. Euler'sche Beweisführung.

α) Gültigkeit des Satzes für ganze negative Exponenten. Es ist gemäß Nr. 6

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots. = y.$$

Angenommen, es sei

$$1 - nx + \frac{(-n)(-n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = z.$$

Durch Multiplication beider Reihen erhält man bis zu jedem beliebigen Gliede

$$1 = y \cdot z = (1 + x)^n \cdot z.$$

Folglich ist

$$z = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}.$$

β) Für gebrochene positive Exponenten. Es ist für ganze m und n

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots = y,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots = z,$$

und offenbar auch

$$(1+x)^{m+n} = 1 + (m+n)x + \binom{m+n}{2} x^2 + \binom{m+n}{3} x^3 + \cdots = yz.$$

Setzt man nacheinander $m = n, 2n, 3n \ldots.$, so ist

$$1 + 2n\,x + \frac{2n\,(2n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots. = (1+x)^{2n} = y^2,$$

allgemein

$$1 + snx + \frac{sn\,(sn-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots. = (1+x)^{sn} = [(1+x)^n]^s.$$

Angenommen, es sei nun

$$1 + \frac{p}{q} x + \frac{p/q\,(p/q-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p/q\,(p/q-1)(p/q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots = u,$$

so ist nach der vorhergehenden Reihe

$$1+px+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots=u^q=(1+x)^p.$$

Folglich ist

$$u=(1+x)^{p/q}.$$

γ) Für gebrochene negative Exponenten. Es sei

$$1-\frac{p}{q}x+\frac{-p/q\cdot(-p/q-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{-p/q\cdot(-p/q-1)(-p/q-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$
$$+\ldots=u,$$

so ist dem Vorigen gemäß

$$1+px+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2+\binom{p}{3}x^3+\ldots=u^{-q}=(1+x)^{p'}$$

folglich

$$u=(1+x)^{-p/q}.$$

II. Methode der unbestimmten Coefficienten.

Für negative ganze Exponenten. Es sei für ganze n

$$(a+x)^n=P^n=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots,$$

so ist

$$P^{-n}=\frac{1}{a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots}=A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots,$$

wovon $A_1\ A_2\ A_3$ u. s. w. noch näher zu bestimmende Größen sind, für welche man ebenso viele Bestimmungsgleichungen erhält, wenn man die beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, also

$$P^n\cdot P^{-n}=1=a_1A_1+(a_1A_2+a_2A_1)\,x$$
$$+(a_1A_3+a_2A_2+a_3A_1)\,x^2+\ldots.$$

Da die Ausdrücke für alle Werthe von x gelten sollen, so gelten sie auch für $x=0$. Demgemäß ist

$$a_1A_1=1,\qquad A_1=\frac{1}{a_1}=a^{-n},$$

$$a_1A_2+a_2A_1=0,\quad A_2=-a_2A_1:a_1=-n\cdot a^{-n-1},$$

$$a_1A_3+a_2A_2+a_3A_1=0,\ A_3=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}=\binom{-n}{2}\cdot a^{-n-2},$$

u. s. w. u. s. w.

§. 93.

Eigenschaften der Binomial-Coefficienten. Figurirte Zahlen.

$\binom{b}{n}$ heißt der $n$te, $\binom{b}{0}$ der nullte Binomial-Coefficient.

1) $\binom{b}{n} = \binom{b}{b-n}$. Vergleiche §. 89, 9).

3) α) $\binom{b}{o} = \binom{b}{b} = 1.$

Beweis: Es ist

$$\binom{b}{n} = \binom{b}{b-n} = \frac{b\,(b-1)\,(b-2)\ldots.(b-[b-n]+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (b-n)}$$

Setzt man nun $n = 0$, so wird

$$\binom{b}{0} = \binom{b}{b} = \frac{b(b-1)\,(b-2)\ldots.\,2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots.(b-1)\,b} = 1.$$

γ) $\binom{b}{b+1} = 0.$

Beweis: Setzt man in

$$\binom{b}{n} = \frac{b(b-1)\,(b-2)\ldots.(b-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots. n}$$

$n = b + 1$, so wird der letzte Factor im Dividenden gleich Null.

4) **Lehrsatz:** Ist der Zeiger n negativ, oder größer als die Basis b, so wird der Binomial-Coefficient allemal gleich Null, vorausgesetzt, daß b eine positive ganze Zahl ist. Ist dies nicht der Fall, so kann der Binomial-Coefficient nur für einen negativen Zeiger gleich Null werden.

Beweis: Ist $n = b + m$, so ist

$$\binom{b}{b+m} = \frac{b(b-1)\,(b-2)\ldots.(-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots. (b+m)}.$$

Wenn also $m \geqq 1$ ist, so ist im Dividenden jedenfalls einer der Factoren gleich Null.

Da ferner gemäß Nr. 1 $\left(\frac{b}{b+m}\right) = \left(\frac{b}{-m}\right)$ ist, so ist auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Ist b negativ, so ist

$$\binom{-b}{n} = \pm \frac{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \ldots. \quad n} = \pm\binom{b+n-1}{n}$$

welcher Ausdruck für positive n nicht Null werden kann.

Sind Basis und Index negativ, so ist $\binom{-b}{-n}$ immer Null, wenn $0 > -n > -b$ ist. Denn dann ist

$$\binom{-b}{-n} = \binom{-b}{n-b} = \binom{b+(n-b)-1}{n-b} = \binom{n-1}{n-b}.$$

Folglich, weil $n-b$ negativ und $n-1$ positiv ist

$$\binom{-b}{-n} = 0.$$

Ist aber $0 > -b > -n$, so ist

$$\binom{-b}{-n} = \binom{-b}{n-b} = \pm \frac{b(b+1)(b+2)\ldots.(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \ldots.(n-b)},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$$(a+b)^{-2} =$$

$$\ldots \binom{3}{2}a^2 b^{-4} - \binom{2}{1}a\,b^{-3} + \binom{1}{0}b^{-2} - 0 + \binom{1}{0}a^{-2} -$$

$$\binom{2}{1}a^{-3}\,b + \binom{3}{2}a^{-4}\,b^2 - \ldots.$$

welches in gewisser Weise eine Reihe von -3 Gliedern darstellt, deren Endglieder b^{-2} und a^{-2} und deren Mittelglied 0 ist. (Hyperbolische Reihe.)

Eine Basis von der Form $\frac{p}{q}$ führt bei negativen Indices auf gebrochene positive Indices, die keine Deutung zulassen.

7) Lehrsatz: Die Summe des $n$ten und $n+1$ten Binomial-Coefficienten der $b$ten Potenz ist gleich dem $n+1$ten Binomial-Coefficienten der nächstfolgenden Potenz. Beweis leicht. (Vergl. die Coefficiententafel §. 40.)

8) **Lehrsatz:** Die Summe aller $n$ten Binomial-Coefficienten von der $n$ten bis $b$ten Potenz ist gleich dem $n + 1$ten Coefficienten der nächstfolgenden Potenz.

Beweis mittels wiederholter Anwendung von 7).

$$\binom{b+1}{n+1} = \binom{b}{n} + \binom{b}{n+1}$$

$$= \binom{b}{n} + \binom{b-1}{n} + \binom{b-1}{n+1}$$

$$= \binom{b}{n} + \binom{b-1}{n} + \binom{b-2}{n} + \binom{b-2}{n+1}$$

u. s. w.

11) Figurirte Zahlen. Geht man aus von der Grundreihe

$$1, \quad d, \quad d, \quad d, \quad d, \quad \ldots .$$

so ergeben sich hieraus durch Addition von beliebig vielen Anfangsgliedern

α) die Glieder einer arithmetischen Progression

$$1, \quad 1 + d, \quad 1 + 2d, \quad 1 + 3d, \ldots .$$

Verfährt man mit dieser Reihe ebenso wie mit der Grundreihe, so erhält man

β) die Polygonalzahlen

$$1, \quad 2 + d, \quad 3 + 3d, \quad 4 + 6d \ldots .$$

Substituirt man nämlich successive $d = 0, 1, 2, 3, \ldots .$ so entstehen die

natürlichen Zahlen 1 2 3 4

·   · ·   · · ·   · · · ·

Trigonalzahlen 1 3 6 10

·   · ·   · · ·   · · · ·
       ·   · ·   · · ·
            ·   · ·
                ·

Quadratzahlen 1 4 9 16

```
.     . .     . . .     . . . .
      . .     . . .     . . . .
              . . .     . . . .
                        . . . .
```

Pentagonalzahlen 1 5 12

```
.       . .         . . .
      .     .     .       .
         .          .       .
                      .   .
                        .
```

Aus der Reihe β) erhält man

γ) die Pyramidalzahlen:

$$1, \quad 3 + d, \quad 6 + 4d, \quad 10 + 10d \ldots .$$

Substituirt man nämlich successive $d = 0, 1, 2 \ldots$, so entstehen nach einander die drei-, vier-, fünfseitigen Pyramidalzahlen.

Setzt man nun in α, β, γ überall $d = 0$, so erhält man die eigentlichen figurirten Zahlen, und zwar

$$\text{1ster Ordnung } 1 + 1 + 1 + \ldots . + \underset{(n)}{1} = \frac{n}{1},$$

$$\text{2ter Ordnung } 1 + 2 + 3 + \ldots . + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

$$\text{3ter Ordnung } 1 + 3 + 6 + \ldots . + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$m\text{ter Ordnung } 1 + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \ldots + \binom{n+m-2}{m-1}$$
$$= \binom{n+m-1}{m}.$$

Hieraus folgt der Satz: Die $n$te figurirte Zahl der $m$ten Ordnung ist gleich der Summe der n ersten figurirten Zahlen der $m-1$ten Ordnung.

Beweis: Mit Anwendung von §. 8 β, Zusatz.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen von höheren Graden und transcendente Gleichungen.

A. Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln.

§. 94.

1) Bildung der Gleichungen aus Binomialfactoren. Eine Gleichung von der Form

$$X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \dots + t = 0$$

auflösen, heißt für x alle Werthe aufsuchen, welche der Gleichung genügen oder die Function x gleich Null machen. Genügen dieser Forderung mehrere Werthe $\alpha, \beta, \gamma \dots$, so ist

$$x - \alpha = 0, \; x - \beta = 0, \; x - \gamma = 0 \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser binomischen Gleichungen wird offenbar ein Polynom erhalten, welches dieselben Wurzeln besitzt.

3) Lehrsatz: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. die Wurzeln einer Function $X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - \dots + t$, so ist X durch die Differenzen $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ u. s. w. ohne Rest theilbar.

Erster Beweis: Angenommen, man theile die Function

$$X = x^n - a\,x^{n-1} + b\,x^{n-2} - c\,x^{n-3} + \dots + t = 0$$

durch $x - \alpha$ und die Division ginge nicht auf, so ist der Quotient $X_{\prime}$ eine Function von nächst niedrigem Grade, also

$$X_{\prime} = x^{n-1} - Ax^{n-2} + \dots + T,$$

wobei der Rest R kein x mehr enthält, so daß man hat

$$(x - \alpha)\,(x^{n-1} - A\,x^{n-2} + \dots + T) + R = 0.$$

Soll die Division aufgehen, also $R = 0$ sein, so folgt hieraus $x - \alpha = 0$ und umgekehrt.

Zweiter Beweis: Sei α eine der Wurzeln der Gleichung $X = 0$, so ist

$$W = \alpha^n - a\,\alpha^{n-1} + b\,\alpha^{n-2} - c\,\alpha^{n-3} + \ldots + t = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von der gegebenen erhält man

$$(x^n - \alpha^n) - a\,(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots - S(x - \alpha) = 0.$$

Diese Gleichung ist durch $x-\alpha$ theilbar. Nun ist W eine Größe, welche bei ihrer Subtraction von X einen Theil des Absolutgliedes t bildet. Da sie aber gleich Null ist, so wird durch ihre Subtraction die Beschaffenheit der Function X nicht geändert, d. h. sie muß selbst durch $x - \alpha$ theilbar sein.

Hieraus folgt, daß die Aufgabe, Gleichungen aufzulösen, allgemein gefaßt darin besteht, die Differenzen $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$ zu bestimmen, durch welche die gegebene Function oder die auf Null reducirte Gleichung ohne Rest theilbar ist. Diese Differenzen müssen gleich Null sein und ihre Subtrahenden sind Wurzeln der Gleichung.

4) Mit Rücksicht auf die oben angedeutete Bildungsweise der höheren Gleichungen aus Binomialfactoren hat man die Coefficienten $a, b, c \ldots$ als die Summen der Combinationen der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ zu allen Klassen zu betrachten, also gemäß §. 92, 2)

$$X = x^n - S\underset{1}{C}(\alpha\beta\gamma\cdots\nu)x^{n-1} + S\underset{2}{C}(\alpha\beta\gamma\cdots\nu)x^{n-2} - S\underset{3}{C}(\alpha\beta\gamma\cdots\nu)x^{n-3} + \cdots$$

5) **Lehrsatz:** **Jede Gleichung vom $n$ten Grade hat n, aber auch nur n Wurzeln.**

Vorbereitung:

a) In jeder Gleichung $X = 0$ ist die Function X für alle endlichen und reellen Werthe von x eine continuirliche Function. Denn angenommen, x ändere sich um d, so wird, wenn man X mit $f(x)$ bezeichnet, $f(x+d) = (x + d)^n - a(x + d)^{n-1} + \ldots + t$
oder nach Potenzen von d entwickelt

$$f(x + d) = f(x) + d\left[\binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n-1}{1} a x^{n-2} + \ldots - s\right]$$
$$+ d^2\left[\binom{n}{2} x^{n-2} - \binom{n-1}{2} a x^{n-3} + \ldots + r\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da nun aber für endliche und reelle Werthe von x die eingeklammerten Ausdrücke weder ∞ noch imaginär werden, so ist auch die Differenz $f(x+d) - f(x)$ für unendlich kleine d selbst unendlich klein, d. h. die Function X kann nicht sprungweise (discontinuirlich) vom Positiven zum Negativen übergehen. Findet dieser Uebergang Statt, so kann er nur durch Null hindurch geschehen, und zwar bei einem bestimmten Werthe $x = \alpha$, welcher offenbar eine Wurzel der Gleichung sein wird.

b) Ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen m der größte Coefficient der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + \ldots + m\,x^{n-y} + \ldots + t = 0,$$

so wird für $x \geqq m + 1$ das erste Glied x^n größer als die Summe aller übrigen. Offenbar ist

$$m\,x^{n-1} + mx^{n-2} + \ldots + m > a\,x^{n-1} + b\,x^{n-2} + \ldots + t,$$

oder

$$m\,\frac{x^n - 1}{x - 1} > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + t.$$

Da nun $x - 1 \geqq m$ sein soll, so ist um so mehr

$$x^n - 1 > a\,x^{n-1} + b\,x^{n-2} + \ldots + t,$$

und noch mehr

$$x^n > ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + t$$

c) Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Wurzel, deren Zeichen das entgegengesetzte vom Absolutgliede t ist. Denn setzt man erstlich $x=0$, so erhält man $X = \pm t$. Setzt man darauf $x = \mp (m + 1)$, so erhält X einen Werth, dessen Vorzeichen mit dem von x^n übereinstimmt, also $X = \mp T$. Es liegt also dem Satz a) gemäß zwischen 0 und $\mp (m + 1)$ jedenfalls eine reelle Wurzel.

d) Jede Gleichung von geradem Grade hat, wenn das letzte Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen. Denn setzt man $x=0$, so wird

$$X = x^n + ax^{n-1} + \ldots - t = - t.$$

Setzt man darauf $x = \mp (m + 1)$, so wird in beiden Fällen das erste Glied positiv. Mithin liegt eine negative Wurzel zwischen 0 und $-(m + 1)$ und eine positive zwischen 0 und $+(m + 1)$.

e) Jede Gleichung von geradem Grade hat, wenn ihr Absolutglied positiv ist, ihre Coefficienten mögen reell oder zum Theil imaginär sein, wenigstens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$. Setzt man in die gegebene Gleichung $x = p + q\sqrt{-1}$ ein, so erhält man für x einen Ausdruck von der Form $X = P + Q\sqrt{-1}$, wobei sich zeigen läßt, daß stets reelle Werthe p und q sich finden lassen, für welche $P = 0$ und $Q = 0$ werden. Dieser Nachweis setzt indeß die Kenntniß der Differenzial-Rechnung voraus, weshalb wir ihn übergehen.

Aus den Sätzen a) bis e) folgt, daß jede höhere Gleichung wenigstens eine Wurzel hat. Wir gehen nach dieser Vorbereitung zum Beweise des Hauptsatzes über, welcher aus zwei Theilen besteht.

I. Jede Gleichung vom $n$ten Grade hat mindestens n Wurzeln.

Beweis: Sei α die Wurzel, welche der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + t = 0$$

nothwendig zukommt, so ist

$$X = (x - \alpha)(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots . s_1) = 0.$$

Diese Gleichung wird aber außer durch $x - \alpha = 0$ erfüllt durch

$$X_{\prime} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots . + s_1 = 0.$$

Ist β die Wurzel, welche dieser Gleichung nothwendig zukommt, so ist

$$X_{\prime} = (x - \beta)(x^{n-2} + a_2x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \ldots . r_2) = 0.$$

Man kann so oft dieselbe Schlußfolge anwenden, bis man von dem Polynom auf ein Binom kommt, also

$$(x - \sigma)(x + a_8) = 0,$$

woraus sich die beiden letzten Wurzeln ergeben, nämlich $x = \sigma$, $x = - a_8 = \tau$.

Hieraus folgt, daß man jede algebraische Function X vom $n$ten Grade in n binomische Factoren zerlegen kann, also

$$X = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots . (x - \tau) = 0.$$

II. Jede Gleichung vom $n$ten Grade hat nur n Wurzeln.

Beweis: Seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots. \tau$ die Wurzeln der Gleichung $X = 0$, so müßte, wenn es noch eine Wurzel, z. B. ω geben sollte, offenbar

$$(\omega - \alpha)(\omega - \beta)(\omega - \gamma) \ldots. (\omega - \tau) = 0$$

sein, was nur möglich sein könnte, wenn einer der Factoren, z. B. $\omega - \beta = 0$ wäre. Dann müßte aber $\omega = \beta$ sein, also keine neue Wurzel.

6) Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus dem in 5, a) bewiesenen Theoreme, daß die Function eine continuirliche sei.

7) Dieser Satz ist in 5, c) allgemein bewiesen.

8) und 9) Soll die Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots. + t = 0$ in eine andere verwandelt werden, in welcher das zweite Glied fehlt, so setze man $x = y + \frac{a}{n}$. Soll außer dem zweiten noch das $m$te Glied fehlen, so bedarf es dazu der Auflösung einer Gleichung vom $m - 1$ten Grade. *)

Division der numerischen Gleichungen durch das Binom $x - \alpha$. Ist α eine Wurzel einer Gleichung vom $n$ten Grade, so findet man die Gleichung vom $n - 1$ten Grade, welche die übrigen Wurzeln liefert, indem man sie durch $x - \alpha$ dividirt. Dies geschieht am einfachsten nach dem in §. 59 b Nr. 45 erklärten Verfahren.

Zahlenbeispiel: §. 99, 19) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$. $x = -1$ ist eine Wurzel dieser Gleichung.

-1	3	-4	-14	-4	$+3$
	3	-7	-7	$+3$	0

Die Gleichung vom dritten Grade ist $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Reduction der numerischen Gleichungen. Um die Gleichung $a_0x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in eine andere $a_0y^4 + a_1y^3 + b_1x^2 + c_1y + d_1 = 0$ zu verwandeln, deren Wurzeln sämmtlich um α kleiner sind als x, setze man $x = y + \alpha$, $y = x - \alpha$. Mithin sind identische Gleichungen

$$a_0\, x^4 + a\, x^3 + b\, x^2 + c\, x + d = 0,$$

und

$$a_0\,(x - \alpha)^4 + a_1\,(x - \alpha)^3 + b_1\,(x - \alpha)^2 + c_1\,(x - \alpha) + d_1 = 0.$$

*) Tschirnhaus und Bring erfanden eine Methode, durch Substitution neuer Unbekannten beliebig viele Glieder einer Gleichung wegzuschaffen. Grun. Arch. XLI. pag. 105.

Da die zweite Gleichung durch $x - \alpha$ getheilt den Rest d_1 gibt, so läßt auch die erste denselben Rest. Theilt man wieder den Quotienten durch $x-\alpha$, so bleibt als Rest c_1 u. s. f.

Zahlenbeispiel: §. 98a, 6) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$. Substituire $x = y + 2$:

	1	− 8	+ 14	+ 4	− 8
2	1	− 6	+ 2	+ 8	(+ 8)
	1	− 4	− 6	(− 4)	
	1	− 2	(− 10)		
	1	(0)			

Es ist also $y^4 - 10y^2 - 4y + 8 = 0$.

B. Directe Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade.

§. 95a.

Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

1) $x^3 - 1 = 0$. (Rein cubische Gleichung.)

Auflösung mittels der Moivre'schen Formel.

Es ist

$$x^3 = 1 = \cos 2n\pi \pm \sin 2n\pi \sqrt{-1},$$

$$x = \sqrt[3]{1} = \cos {}^2/_3 n\pi \pm \sin {}^2/_3 n\pi \sqrt{-1},$$

wo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$ bedeutet.

Nun ist für $n = 0$, $x_1 = 1$,

$n = 1$, x_2 und $x_3 = - {}^1/_2 \pm {}^1/_2 \sqrt{-3}$.

$n = 2, 3, \ldots.$ geben keine neuen Werthe.

5) Reduction der cubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ auf den vollständigen Kubus einer zweitheiligen Größe. *)

Substituirt man $x = y + z$, so erhält man

$$y^3 + (3z + a)y^2 + (3z^2 + 2az + b)y + (z^3 + az^2 + bz + c) = 0$$

oder kurz

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0.$$

*) Methode des Verfassers. Zeitschr. f. Math. u. Phys. VIII. 135.

Diese Gleichung läßt sich transformiren in eine Gleichung von der Form

$$\eta^3 + A\,\eta^2 + {}^1/_3\,A^2\,y + {}^1/_{27}\,A^3 = B,$$

welche rein cubisch ist.

Man bilde die Gleichung, deren Wurzeln die Wurzelquadrate der gegebenen sind, wie folgt

$$(y^3 + \beta y)^2 = (-\alpha y^2 - \gamma)^2.$$

Ordnet man und setzt $y^2 = \eta$, so wird

$$\eta^3 - (\alpha^2 - 2\,\beta)\,\eta^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma)\,\eta - \gamma^2 = 0.$$

Es ist also

$$-A = \alpha^2 - 2\beta = 3z^2 + 2az + (a^2 - 2b),$$

$$\tfrac{1}{3}A^2 = \beta^2 - 2\alpha\gamma = 3z^4 + 4az^3 + 2a^2z^2 + (2ab - 6c)z + (b^2 - 2ac),$$

$$B - \tfrac{1}{27}A^3 = \gamma^2 = [z^3 + az^2 + bz + c]^2,$$

und

$$\tfrac{1}{3}(\alpha^2 - 2\beta)^2 - (\beta^2 - 2\alpha\gamma)$$

$$= 4(a^2 - 3b)\,z^2 + (4a^3 - 14ab + 18c)z + (a^4 - 4a^2b + 6ac + b^2) = 0,$$

woraus z gefunden wird.

§. 95b.

1) Cardanische Formel und Formeln von Clausen und Hulbe.

$$x^3 + p\,x + q = 0.$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}\ ^{*)}$$

$$= 1 \cdot u + 1 \,.\, v,$$

$$x_2 = J_1 \cdot u + J_2 \cdot v = -\tfrac{1}{2}(u + v) + \tfrac{1}{2}(u - v)\sqrt{-3},$$

$$x_3 = J_2 \cdot u + J_1 \cdot v = -\tfrac{1}{2}(u + v) - \tfrac{1}{2}(u - v)\sqrt{-3}.$$

---

*) Formel von Scipio Ferreo, Tartaglia und Cardano. Die beiden ersten Entdecker hielten sie geheim. Cardano hat die ihm in Versen versteckte im Vertrauen von Tartaglia mitgetheilte Formel nur geometrisch bewiesen, wie sie nach seinem Zeugniß von den beiden Anderen auch nur gefunden sein soll.

Beweis von Hudde. *) Die Auflösung erfordert die Wegschaffung des zweiten Gliedes. Man substituire $x = y + z$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3\,y\,z\,(y + z) + z^3 \\ p\,x &= p\,(y + z) \\ q &= q \end{aligned}$$

$$x^3 + p\,x + q = 0 = y^3 + z^3 + q + (3\,y\,z + p)\,(y + z).$$

Da y oder z willkürlich ist, so kann man das Polynom theilen und annehmen

$$y^3 + z^3 + q = 0,$$

$$(3\,y\,z + p)\,(y + z) = 0.$$

Da $y + z = x$ im Allgemeinen nicht gleich Null ist, so ist $3yz + p = 0$, also

$$y^3 + z^3 = -\,q,$$

$$3\,y\,z = -\,p.$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$y = \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

$$z = \sqrt[3]{1}\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

In diesen Ausdrücken gelten gleichzeitig die oberen oder die unteren Vorzeichen. Da $\sqrt[3]{1}$ drei verschiedene Werthe hat, nämlich 1, J_1 und J_2, so werden im Ganzen neun Combinationen von $y + z$ möglich sein, von denen aber nur drei den Bestimmungsgleichungen genügen.

2) Ist $x = \alpha$, so ist $x^3 + p\,x + q = 0$,

$$\alpha^3 + p\,\alpha + q = 0,$$

folglich $$(x^3 - \alpha^3) + p\,(x - \alpha) = 0,$$

und wenn man durch $x - \alpha$ dividirt,

$$x^2 + \alpha x + (\alpha^2 + p) = 0.$$

*) Epist. de reductione aequat. und Schooten's Ausgabe von Descartes' Geometrie 1659, pag. 499.

Diese Gleichung liefert die beiden anderen Wurzeln

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}\alpha^2 - p}.$$

Die beiden anderen Wurzeln sind also complex, wenn p positiv ist.

3) Ist p negativ, so hat die Gleichung

drei reelle Wurzeln für $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 \leqq 0$,

zwei complexe Wurzeln für $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 > 0$.

Im ersten Falle, wobei die Wurzeln in imaginärer Form erscheinen (casus irreducibilis) muß nämlich

$$-p \geqq \tfrac{3}{4}\alpha^2 \text{ oder } \alpha \leqq 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

sein. Es ist aber auch $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$, also

$$-q = \alpha(\alpha^2 + p)$$

$$-q \leqq 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(-\frac{4p}{3} + p\right)$$

oder

$$\frac{q^2}{4} \leqq -\frac{p^3}{27}, \text{ d. i. } \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 \leqq 0.$$

Im zweiten Falle bemerke man, daß u und v reelle Größen, mithin x_2 und x_3 complex sind.

31) Die allgemeine Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ aufzulösen. *) Man setze

$$\frac{x + z_0}{x + z_1} = u,$$

wo u eine neue Unbekannte, z_0 und z_1, die zwei Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung (Resolvente) bezeichnen. Erhebt man diese Gleichung zur dritten Potenz, so ist die nach x geordnete Gleichung

$$x^3 + 3\frac{z_0 - z_1u^3}{1 - u^3}x^2 + 3\frac{z_0^2 - z_1^2u^3}{1 - u^3}x + \frac{z_0^3 - z_1^3u^3}{1 - u^3} = 0.$$

Durch Vergleichung dieser mit der gegebenen Gleichung erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

*) Matthiessen, die algebraischen Methoden. Programm der Husumer Gelehrtenschule 1866. Pag. 24. Leipzig bei B. G. Teubner.

$$u^3 = \frac{z_0 - p/_3}{z_1 - p/_3} = \frac{z_0^2 - q/_3}{z_1^2 - q/_3} = \frac{z_0^3 - r}{z_1^3 - r} =$$

$$\frac{z_0^3 - pz_0^2 + qz_0 - r}{z_1^3 - pz_1^2 + qz_1 - r}.$$

Durch Combination je zweier Gleichungen erhält man

$$\text{I. } z_0z_1(z_0 - z_1) - p/_3\,(z_0^2 - z_1^2) + q/_3\,(z_0 - z_1) = 0,$$

und weil $z_0 - z_1$ nicht Null werden kann

$$z_0z_1 - p/_3\,(z_0 + z_1) + q/_3 = 0.$$

$$\text{II. } z_0z_1\,(z_0^2 - z_1^2) - p/_3\,(z_0^3 - z_1^3) + r\,(z_0 - z_1) = 0,$$

oder durch $z_0 - z_1$ dividirt

$$z_0z_1(z_0 + z_1) - p/_3(z_0 + z_1)^2 + p/_3\,z_0z_1 + r = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen für z_0 und z_1 erhält man

$$z_0 + z_1 = + \frac{pq - r}{p^2 - 3q},\ z_0z_1 = \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}.$$

z_0 und z_1 sind also die Wurzeln der Resolvente

$$(p^2 - 3q)\,z^2 - (pq - 9r)z + (q^2 - 3pr) = 0.$$

Hieraus folgen die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x_1 = \frac{z_1\sqrt[3]{z_0^3 - r} - z_0\sqrt[3]{z_1^3 - r}}{\sqrt[3]{z_1^3 - r} - \sqrt[3]{z_0^3 - r}},$$

$$x_2 = \frac{z_1J_1\sqrt[3]{z_0^3 - r} - z_0J_2\sqrt[3]{z_1^3 - r}}{J_2\sqrt[3]{z_1^3 - r} - J_1\sqrt[3]{z_0^3 - r}},$$

$$x_3 = \frac{z_1J_2\sqrt[3]{z_0^3 - r} - z_0J_1\sqrt[3]{z_1^3 - r}}{J_1\sqrt[3]{z_1^3 - r} - J_2\sqrt[3]{z_0^3 - r}}.$$

Das Princip dieser Methode stimmt überein mit dem oben §. 69 Nr. 26 III auf die quadratischen Gleichungen angewandten.

§. 96.

2) Trigonometrische Formeln.

I. $x^3 + px \pm q = 0$. Nach der Cardanischen Formel ist

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}} \mp \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

Substituirt man $4p^3 : 27q^2 = tan\ \alpha^2$, so ist

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{cos\ \alpha}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{cos\ \alpha}}\right]$$

$$= \mp \sqrt[3]{\frac{q}{2}\,tan\ \alpha}\left[\sqrt[3]{\frac{1 + cos\ \alpha}{sin\ \alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1 - cos\ \alpha}{sin\ \alpha}}\right]$$

$$= \mp \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{cot\frac{\alpha}{2}} - \sqrt[3]{tan\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Substituirt man weiter $\sqrt[3]{tan\frac{\alpha}{2}} = tan\ \beta$, so entsteht

$$x_1 = \mp \sqrt{\frac{p}{3}}\left[cot\ \beta - tan\ \beta\right] = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot cot\ 2\beta,$$

und weil

$$x_1 x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{4}{3}x_1^2 - p},$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = \pm\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\,cot\ 2\beta \pm \frac{1}{sin\ 2\beta}\sqrt{-p}\right).$$

II. $x^3 - px \pm q = 0$; $4p^3 \lesseqgtr 27q^2$. Substituirt man in der Cardanischen Formel $4p^3 : 27q^2 = sin\ \gamma^2$, so wird

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{q}\left[\sqrt[3]{\frac{1 + cos\ \gamma}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - cos\ \gamma}{2}}\right]$$

$$= \mp \sqrt[3]{q \cdot cos\ \gamma/_2^{\,2}}\left(1 + \sqrt[3]{tan\ \gamma/_2^{\,2}}\right).$$

Weil ferner $q = 2\sqrt{p/_3}^{\,3} : sin\ \gamma = \sqrt{p/_3}^{\,3} : sin\ \gamma/_2\ cos\ \gamma/_2$ ist, so wird $\sqrt[3]{q \cdot cos\ \gamma/_2^{\,2}} = \sqrt{p/_3}\ cot\ \delta$ und folglich

$$x_1 = \mp \sqrt{p/_3} \cdot \frac{\cot \delta}{\cos \delta^2} = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} : \sin 2\delta.$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = \pm \sqrt{p/_3}\, \frac{1 \pm \cos 2\delta \sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

III. $x^3 - px \pm q = 0$; $4p^3 \gtreqless 27\, q^2$. (Casus irreducibilis.) Man geht aus von der goniometrischen Formel

$$\sin 3\varepsilon = 3 \sin \varepsilon - 4 \sin \varepsilon^3.$$

und setzt in derselben $\sin \varepsilon = x : r$, also $r > x$. Dies gibt die Gleichung $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = 0$. Identificirt man diese cubische Gleichung mit der gegebenen, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\tfrac{3}{4} r^2 = p;\ \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = \pm q;$$

oder

$$r = \sqrt{\frac{4p}{3}};\ \sin 3\varepsilon = \pm \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}}.$$

Diese Gleichung liefert drei verschiedene Werthe für 3ε, indem

$$\sin 3\varepsilon = \sin (180 - 3\varepsilon) = - \sin (180 + 3\varepsilon)$$

ist. Da ferner $x = r \sin \varepsilon$ ist, so entspringen daraus die drei Wurzelwerthe

$$x_1 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \cdot \sin \varepsilon,\ x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \cdot \sin (60 - \varepsilon),$$
$$x_3 = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\, \sin (60 + \varepsilon).$$

IV. $x^3 - px \pm q = 0$; $4p^3 \gtreqless 27\, q^2$. (Casus irreducibilis.)

Auflösung von Könitzer. Substituirt man in der Cardanischen Formel $\mp q/_2 = a$, $\sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27}p^3} = b\sqrt{-1}$, so ist

$$x_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt{a}\left[\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Setze $\frac{b}{a} = \tan \varphi$, so ist

§. 96.

2) Trigonometrische Formeln.

I. $x^3 + px \pm q = 0$. Nach der Cardanischen Formel ist

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}} \mp \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

Substituirt man $4p^3 : 27q^2 = tan\, \alpha^2$, so ist

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{cos\, \alpha}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{cos\, \alpha}}\right]$$

$$= \mp \sqrt[3]{\frac{q}{2}\, tan\, \alpha} \left[\sqrt[3]{\frac{1 + cos\, \alpha}{sin\, \alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1 - cos\, \alpha}{sin\, \alpha}}\right]$$

$$= \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \left[\sqrt[3]{cot \frac{\alpha}{2}} - \sqrt[3]{tan \frac{\alpha}{2}}\right].$$

Substituirt man weiter $\sqrt[3]{tan \frac{\alpha}{2}} = tan\, \beta$, so entsteht

$$x_1 = \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \left[cot\, \beta - tan\, \beta\right] = \mp 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot cot\, 2\beta,$$

und weil

$$x_1 x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{4}{3}x_1^2 - p},$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = \pm \left(\sqrt{\frac{p}{3}}\, cot\, 2\,\beta \pm \frac{1}{sin\, 2\,\beta} \sqrt{-p}\right).$$

II. $x^3 - px \pm q = 0;\ 4p^3 \lesseqgtr 27\, q^2$. Substituirt man in der Cardanischen Formel $4p^3 : 27q^2 = sin\, \gamma^2$, so wird

$$x_1 = \mp \sqrt[3]{q} \left[\sqrt[3]{\frac{1 + cos\, \gamma}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - cos\, \gamma}{2}}\right]$$

$$= \mp \sqrt[3]{q \cdot cos\, \gamma/_2^{\,2}} \left(1 + \sqrt[3]{tan\, \gamma/_2^{\,2}}\right).$$

Weil ferner $q = 2\sqrt{p/_3}^{\,3} : sin\, \gamma = \sqrt{p/_3}^{\,3} : sin\, \gamma/_2\, cos\, \gamma/_2$ ist, so wird $\sqrt[3]{q \cdot cos\, \gamma/_2^{\,2}} = \sqrt{p/_3}\, cot\, \delta$ und folglich

$$x_1 = \mp \sqrt{p/3} \cdot \frac{\cot \delta}{\cos \delta^2} = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} : \sin 2\,\delta.$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = \pm \sqrt{p/3}\; \frac{1 \pm \cos 2\delta \sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

III. $x^3 - px \pm q = 0$; $4p^3 \gtreqless 27\,q^2$. (Casus irreducibilis.) Man geht aus von der goniometrischen Formel

$$\sin 3\varepsilon = 3 \sin \varepsilon - 4 \sin \varepsilon^3.$$

und setzt in derselben $\sin \varepsilon = x : r$, also $r > x$. Dies gibt die Gleichung $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = 0$. Identificirt man diese cubische Gleichung mit der gegebenen, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\tfrac{3}{4} r^2 = p; \; \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varepsilon = \pm q;$$

oder

$$r = \sqrt{\frac{4p}{3}}; \; \sin 3\varepsilon = \pm \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}}.$$

Diese Gleichung liefert drei verschiedene Werthe für 3ε, indem

$$\sin 3\varepsilon = \sin (180 - 3\varepsilon) = - \sin (180 + 3\varepsilon)$$

ist. Da ferner $x = r \sin \varepsilon$ ist, so entspringen daraus die drei Wurzelwerthe

$$x_1 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \cdot \sin \varepsilon, \; x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \cdot \sin (60 - \varepsilon),$$
$$x_3 = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \sin (60 + \varepsilon).$$

IV. $x^3 - px \pm q = 0$; $4p^3 \gtreqless 27\,q^2$. (Casus irreducibilis.)

Auflösung von Könitzer. Substituirt man in der Cardanischen Formel $\mp q/2 = a$, $\sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3} = b\sqrt{-1}$, so ist

$$x_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt[3]{a} \left[\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Setze $\frac{b}{a} = \tan \varphi$, so ist

$$x_1 = \sqrt[3]{a}\,[(1 + tan\,\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (1 - tan\,\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}]$$

$$= \sqrt[3]{\frac{a}{cos\,\varphi}}\left[(cos\,\varphi + sin\,\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (cos\,\varphi - sin\,\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right].$$

Mit Anwendung des Moivre'schen Satzes erhält man nun

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{a}{cos\,\varphi}} \cdot cos\,\varphi/_3,$$

und wegen

$$cos\,\varphi = -\,cos\,(180 + \varphi) = -\,cos\,(180 - \varphi),$$

$$x_2 = -\,2\sqrt[3]{\frac{a}{cos\,\varphi}} \cdot cos\,(60 - \varphi/_3);$$

$$x_3 = -\,2\sqrt[3]{\frac{a}{cos\,\varphi}} \cdot cos\,(60 + \varphi/_3).$$

C. Directe Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

§. 97.

I. Ampère'sche Formel.

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Heißen die Wurzeln dieser Gleichung x_1, x_2, x_3, x_4, und setzt man $x_1 + x_2 = y$, so ist die Resolvente:

$$y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)\,y^2 - b^2 = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{ y \pm \sqrt{-\,y^2 - 2\left(a + \frac{b}{y}\right)}\right\}.$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\,\tfrac{1}{2}\left\{ y \mp \sqrt{-\,y^2 - 2\left(a - \frac{b}{y}\right)}\right\}.$$

Beweis: Die Methoden der Auflösung der Gleichung sind entweder Substitutions- oder Combinationsmethoden. In der ersteren wird in der Regel für die Unbekannte eine lineare Function einer oder mehrerer anderen eingesetzt, z. B. $x = y + z$; in

der zweiten werden gewisse Combinationen der unbekannten Wurzeln zu neuen Unbekannten erwählt, z. B. $x_1 x_2$ oder $x_1 + x_2$. Wir wählen hier das letztere Verfahren zur Auffindung der Wurzelgrößen, und setzen $x_1 + x_2 = y$. Dann ist gemäß §. 94. 4)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;\ x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4) = y,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$
$$= x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = a,$$

also I. $x_1x_2 + x_3x_4 = a + y^2$.

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = x_1x_2(x_3 + x_4)$$
$$+ x_3x_4(x_1 + x_2) = -b,$$

also II. $x_1x_2 - x_3x_4 = b : y$.

$$x_1x_2x_3x_4 = c.$$

Weil nun aber $(x_1x_2 + x_3x_4)^2 - (x_1x_2 - x_3x_4)^2 = 4x_1x_2x_3x_4$ ist, so ist auch

$$(a + y^2)^2 - (b : y)^2 = 4\,c \text{ und}$$

$$y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)\,y^2 - b^2 = 0.$$

Addirt man I. und II., so wird $2x_1x_2 = 2x_1(y - x_1) = y^2 + a + \frac{b}{y}$, oder $x_1^2 - yx_1 = -\frac{1}{2}\left(y^2 + a + \frac{b}{y}\right)$. Diese quadratische Gleichung gibt die Wurzeln x_1 und x_2.

Subtrahirt man II. von I., so wird $2x_3x_4 = y^2 + a - \frac{b}{y}$, also

$$x_3x_4 = \frac{1}{2}\left(y^2 + a - \frac{b}{y}\right),$$

$$x_3 + x_4 = -y,$$

woraus x_3 und x_4 gefunden werden.

§. 98 a.

II. Euler'sche, Cartesius'sche und Ferrari'sche Formel.

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

I. Euler'sche Formel: Sind y_1, y_2, y_3 die Wurzeln der Resolvente $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \frac{1}{64}b^2 = 0$, so ist für

b positiv:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = +\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).$$

b negativ:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = +\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).$$

Euler'scher Beweis: *) Die Auflösung ist von Euler vermuthlich durch ein Combinationsverfahren entdeckt. Denn setzt man

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{y_1},$$
$$x_1 + x_3 = 2\sqrt{y_2},$$
$$x_1 + x_4 = 2\sqrt{y_3},$$

so folgt $x_1 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$.

Man setze also $x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$, worin $y_1\, y_2\, y_3$ die Wurzeln einer allgemeinen cubischen Gleichung sind, also von $y^3 - dy^2 + ey - f = 0$, so daß

$$y_1 + y_2 + y_3 = d,$$
$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = e,$$
$$y_1 y_2 y_3 = f,$$

sein wird. Quadrirt man die supponirte Gleichung, so wird

$$x^2 - d = 2\sqrt{y_1 y_2} + 2\sqrt{y_1 y_3} + 2\sqrt{y_2 y_3}.$$

Quadrirt man abermals und transponirt, so erhält man

$$x^4 - 2dx^2 + d^2 - 4e = 8\sqrt{y_1 y_2 y_3}\,(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

oder

$$x^4 - 2dx^2 - 8\sqrt{f}\, x + (d^2 - 4e) = 0.$$

*) Anleitung zur Algebra. 2. Theil, §. 192.

Nehmen wir nun an, daß diese Gleichung mit der gegebenen identisch sei, so folgen hieraus die Bedingungsgleichungen:

$$2d = -a, \quad 8\sqrt{f} = -b, \quad d^2 - 4e = c,$$

$$d = -\frac{a}{2}, \qquad f = \frac{b^2}{64}, \; e = \tfrac{1}{16}(a^2 - 4c).$$

Mithin ist

$$y^3 + \frac{a}{2}y^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)\,y - \frac{b^2}{64} = 0.$$

Da nun $\sqrt{y_1 y_2 y_3} = -\frac{b}{8}$ sein muß, so ist für

b positiv: x_1 und $x_2 = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$,
x_3 und $x_4 = +\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})$;

b negativ: x_1 und $x_2 = +\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$,
x_3 und $x_4 = -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})$.

Anderer Beweis: Die Euler'sche Auflösung steht in einem Zusammenhange mit der Ampère'schen. Nach dem in §. 97 geführten Beweise ist mit Rücksicht auf die daselbst angenommene Bedeutung von y

$$x^2 - yx + \tfrac{1}{2}\left(y^2 + a + \frac{b}{y}\right) = 0.$$

Setzt man $4y$ an die Stelle von y^2, so geht die Ampère'sche Resolvente in die Euler'sche über und die quadratische Gleichung mit den Wurzelwerthen x_1 und x_2 in

$$x^2 \mp 2\sqrt{y}\,x + \tfrac{1}{2}\left(4y + a \pm \frac{b}{2\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Hieraus folgt, daß man zur Bestimmung von x folgende Gleichungen aufzulösen hat, in denen y_1, y_2, y_3 die Wurzelwerthe der Resolvente sind.

$$x_1 + x_2 = \mp 2\sqrt{y_1}, \quad x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = \pm 2\sqrt{y_1},$$

$$x_1 + x_3 = \mp 2\sqrt{y_2}, \quad x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3) = \pm 2\sqrt{y_2},$$

$$x_1 + x_4 = \mp 2\sqrt{y_3}, \quad x_2 + x_3 = -(x_1 + x_4) = \pm 2\sqrt{y_3}.$$

Wählt man das obere Vorzeichen, so erhält man

$$x_1 = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3},$$
$$x_2 = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3},$$
$$x_3 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3},$$
$$x_4 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}.$$

Wählt man dagegen überall das untere Vorzeichen, so ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = +\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}).$$

Die Resolvente in y hat wegen des negativen Vorzeichens des letzten Gliedes stets eine positive reelle Wurzel. Um zu ermitteln, wann das obere, wann das untere Vorzeichen gültig sei, recurriren wir auf die Gleichung §. 97, II., nämlich $x_1x_2 - x_3x_4 = b : (x_1 + x_2)$, indem wir voraussetzen, es sei $x_1 + x_2$ der negative Theil der Summe der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Dann geht die Gleichung über in

$$b = (x_1 + x_2)(x_1x_2 - x_3x_4) = (-2\sqrt{y_1}) \cdot (-4\sqrt{y_2y_3})$$
$$= +8\sqrt{y_1y_2y_3}.$$

Ist hingegen $x_1 + x_2 = 2\sqrt{y_1}$, d. h. gleich dem positiven Theile der Wurzelsumme, so ist

$$b = (x_1 + x_2)(x_1x_2 - x_3x_4) = -8\sqrt{y_1y_2y_3}.$$

Ist also b positiv, so sind die oberen, ist b negativ, die unteren Zeichen zu nehmen.

II. Methode von Cartesius. Nachdem die Gleichung reducirt ist, zerlege man sie in zwei trinomische Factoren:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + t) = 0.$$

Die drei Constanten a, b, c führen zu drei Bestimmungsgleichungen von y, z, t; nämlich

$$y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0,$$
$$z = \tfrac{1}{2}\left(y^2 + a - \frac{b}{y}\right),\quad t = \tfrac{1}{2}\left(y^2 + a + \frac{b}{y}\right),$$

welche man in die quadratischen Gleichungen $x^2 + yx + z = 0$, $x^2 - yx + t = 0$ einzusetzen hat.

Die Wurzelformen stimmen also mit denen der Ampère'schen Methode überein.

III. Methode von Ferrari.*) Sie ist die Methode des Erfinders und wird auch italienische Methode genannt. Dieselbe erfordert keine Reduction. Gegeben sei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Man setze unter Einführung dreier neuen Bestimmungsgrößen p, q, r

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2 = (qx + r)^2,$$

oder geordnet

$$x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2p - q^2\right)x^2 + (ap - 2qr)x + (p^2 - r^2) = 0.$$

Die Coexistenz dieser und der gegebenen Gleichung erfordert

$$q^2 = 2p + \left(\frac{a^2}{4} - b\right),$$

$$2qr = ap - c,$$

$$r^2 = p^2 - d,$$

also ist das vierfache Product der ersten und dritten Gleichung gleich dem Quadrate der zweiten.

Hieraus erhält man die Resolvente, welche gleichfalls vom dritten Grade ist, nämlich

$$p^3 - \frac{b}{2}p^2 + \frac{ac - 4d}{4}p - \left[\frac{a^2d - 4bd + c^2}{8}\right] = 0.$$

Diese Gleichung gibt stets eine reelle Wurzel für reelle Coefficienten der biquadratischen Gleichung, deren vier Wurzeln gefunden werden mittels der quadratischen:

$$x^2 + \left(\frac{a}{2} \pm q\right)x + (p \pm r) = 0.$$

---

*) Ludovico Ferrari, ein Schüler von Cardano, erfand zuerst eine Methode, die biquadratischen Gleichungen aufzulösen, ohne sie jedoch zu veröffentlichen. Vergl. Cardanus, Ars magna. Mediolani 1545; und Bombelli, l'algebra parte maggiore dell' Aritmetica. Bologna, 1572.

§. 98b.

III. Andere Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

I. Methode von Hulbe. Sie besteht in der Transformation der Gleichung in eine reciproke biquadratische Gleichung und ist also eine Substitutionsmethode.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

für x den Werth $qy + r$, wo y die neue Unbekannte, q und r zwei Bestimmungsgrößen sind, so erhält man:

$$y^4 + \frac{4r + a}{q} y^3 + \frac{6r^2 + 3ar + b}{q^2} y^2 + \frac{4r^3 + 3ar^2 + 2br + c}{q^3} y + \frac{r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d}{q^4} = 0,$$

oder kurz

$$y^4 + My^3 + Ny^2 + Py + Q = 0.$$

Zur reciproken Form gehört die Bedingung (Reducente) $M^2 Q = P^2$, also

$$r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d = \left(\frac{4r^3 + 3ar^2 + 2br + c}{4r + a}\right)^2.$$

Ordnet man nach Potenzen von r, so erhält man die cubische Resolvente

$$(a^3 - 4ab + 8c)r^3 + (a^2 b + 2ac - 4b^2 + 16d)\, r^2 + (a^2 c + 8ad - 4bc)r + (a^2 d - c^2) = 0,$$

woraus ein reeller Werth von r gefunden werden kann. Drückt man noch q durch r aus, so erhält man die reciproke Gleichung.

Die Hulbe'sche Resolvente geht in die Euler'sche über, wenn man $a = 0$, $r = \frac{c}{8y}$ setzt; also

$$y^3 + \tfrac{1}{2} by^2 + \tfrac{1}{16}(b^2 - 4d)y - \tfrac{1}{64}c^2 = 0.$$

II. Neue Methode *). Dies ist eine Combinationsmethode, welche auf eine reciproke Resolventengleichung vom sechsten Grade führt.

---

*) Methode des Verfassers. Zeitschrift für Phys. u. Math. VIII. pag. 140 und Giornale di Matematiche del Sign. Battaglini di Napoli.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bezeichnet man mit u das geometrische Mittel je zweier Wurzeln der Gleichung, so wird

$$x_1x_2 = u_1^2 = y_1, \quad x_2x_3 = u_4^2 = d : y_3 = \eta_3,$$
$$x_1x_3 = u_2^2 = y_2, \quad x_2x_4 = u_5^2 = d : y_2 = \eta_2,$$
$$x_1x_4 = u_3^2 = y_3, \quad x_3x_4 = u_6^2 = d : y_1 = \eta_1.$$

Es sind nun die Werthe $y_1, y_2, y_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ offenbar die Wurzelwerthe einer reciproken Gleichung vom sechsten Grade. Um zu derselben zu gelangen, setze man in den vier Coefficientengleichungen (§. 97)

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4) = -a, \quad (1)$$
$$x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4) + x_3x_4 = b, \quad (2)$$
$$x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) = -c, \quad (3)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = d, \quad (4)$$

die Combinationen $x_1 + x_2 = z$, $x_1x_2 = y$.

Dadurch erhält man

$$\text{aus (2)} \quad y + \frac{d}{y} - z(a + z) = b, \quad (5)$$

$$\text{aus (3)} \quad -y(z + a) + \frac{d}{y}z = -c. \quad (6)$$

Substituirt man z aus (6) in (5), so erhält man

$$y^6 - by^5 + (ac - d)y^4 - (a^2d - 2bd + c^2)y^3$$
$$+ (ac - d)dy^2 - bd^2y + d^3 = 0,$$

oder

$$\left(y + \frac{d}{y}\right)^3 - b\left(y + \frac{d}{y}\right)^2 + (ac - d)\left(y + \frac{d}{y}\right) - (a^2d - 4bd + c^2) = 0,$$

welche mit der Resolvente von Ferrari übereinstimmt. Die Wurzeln der x-Gleichung sind demnach

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{y_1y_2y_3}{d}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2y_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1y_2\eta_3}{d}}, \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2\eta_3}{d}},$$

je nachdem $[y_1y_2y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1y_2y_3d} = \mp a$, oder

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2\eta_3}{d}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1y_2y_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2y_3}{d}}, \quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_1y_2\eta_3}{d}},$$

je nachdem $[\eta_1\eta_2\eta_3 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)]d : \sqrt{\eta_1\eta_2\eta_3d} = \mp a$ ist.

Man kann die Wurzelwerthe auch in logarithmischen Ausdrücken wieder geben:

$$\log(x_1^2) = \log y_1 + \log y_2 + \log y_3 - \log d,$$
$$\log(x_2^2) = \log \eta_1 + \log \eta_2 + \log y_3 - \log d,$$
$$\log(x_3^2) = \log \eta_1 + \log y_2 + \log \eta_3 - \log d,$$
$$\log(x_4^2) = \log y_1 + \log \eta_2 + \log \eta_3 - \log d.$$

III. Methode von Job. Diese ist ebenfalls eine Combinationsmethode, welche auf eine Resolvente vom sechsten Grade führt, die sich in drei trinomische Factoren vom zweiten Grade zerlegen läßt. Die Wurzeln dieser Resolvente sind die arithmetischen Mittel je zweier Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sie ist also der Euler'schen Auflösung verwandt. Job führt für x den complexen Werth $\varrho(1 \pm \sqrt{-n})$ ein, setzt die Summe der reellen Glieder gleich Null, ebenso die der imaginären und bildet durch Substitution von n aus der einen in die andere eine Gleichung in ϱ (Resolvente). Zu dieser gelangt man aber einfacher auf folgendem Wege: Da $x = \varrho(1 \pm \sqrt{-n})$ ist, so ist

$$x_1 = \varrho_1(1 + \sqrt{-n_1}),\ x_2 = \varrho_1(1 - \sqrt{-n_1}).$$

Addirt man, so wird $\varrho_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, woraus man ersieht, daß ϱ das arithmetische Mittel zweier Wurzelwerthe von x ist. Da es sechs verschiedene Combinationen der vier Wurzeln gibt, so muß die Gleichung in ϱ vom sechsten Grade sein. Um ihre Coefficienten zu finden, recurriren wir auf die Gleichungen (5) und (6) der vorigen Methode und setzen $z = 2\varrho$, also

$$y + \frac{d}{y} - 2\varrho(a + 2\varrho) = b,$$

$$-y(2\varrho + a) + \frac{2d}{y}\varrho = -c.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 2ϱ und subtrahirt die zweite, so erhält man eine Gleichung vom ersten Grade bezüglich y, woraus y in die erste Gleichung eingesetzt werden kann. Dies gibt die Resolvente:

$$\varrho^6 + \frac{3a}{2}\varrho^5 + \frac{3a^2 + 2b}{4}\varrho^4 + \frac{a^3 + 4ab}{8}\varrho^3$$

$$+ \frac{ac + 2a^2b + b^2 - 4d}{16}\varrho^2 + \frac{a^2c + ab^2 - 4ad}{32}\varrho + \frac{abc - a^2d - c^2}{64} = 0.$$

Man erhält diese Gleichung ebenfalls, wenn man x aus den beiden Gleichungen

$$(x - \varrho)^4 + a(x - \varrho)^3 + b(x - \varrho)^2 + c(x - \varrho) + d = 0,$$
$$(x + \varrho)^4 - a(x + \varrho)^3 + b(x + \varrho)^2 - c(x + \varrho) + d = 0,$$

eliminirt. Die halbe Summe dieser Gleichungen ist

$$x^4 + (6\varrho^2 - 3a\varrho + b)\,x^2 + (\varrho^4 - a\varrho^3 + b\varrho^2 - c\varrho + d) = 0,$$

die halbe Differenz

$$(4\varrho - a)\,x^3 + (4\varrho^3 - 3a\varrho^2 + 2b\varrho - c)\,x = 0.$$

Man dividire die letztere Gleichung durch x und setze x^2 in die erste ein.

Um nun eine Resolvente vom dritten Grade zu erhalten, nehme man an

$$\varrho^2 + \frac{a}{2}\varrho + y_1 = 0,$$

$$\varrho^2 + \frac{a}{2}\varrho + y_2 = 0,$$

$$\varrho^2 + \frac{a}{2}\varrho + y_3 = 0,$$

und multiplicire sie mit einander.

Dies gibt

$$\varrho^6 + \frac{3a}{2}\varrho^5 + \left(y_1 + y_2 + y_3 + \frac{3a^2}{4}\right)\varrho^4 +$$

$$+a\left(y_1+y_2+y_3+\frac{a^2}{8}\right)\varrho^3+\left(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+\frac{a^2}{4}(y_1+y_2+y_3)\right)\varrho^2$$

$$+\frac{a}{2}(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\,\varrho+y_1y_2y_3=0.$$

Setzt man die beiden Gleichungen in ϱ Glied für Glied einander gleich, so findet man leicht

$$y_1+y_2+y_3=\frac{b}{2},$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{ac+b^2-4d}{16},$$

$$y_1y_2y_3=-\frac{a^2d-abc+c^2}{64}.$$

Folglich ist

$$y^3-\tfrac{1}{2}by^2+\tfrac{1}{16}(ac+b^2-4d)\,y+\frac{a^2d-abc+c^2}{64}=0,$$

und

$$x_1 \text{ und } x_2=-\tfrac{1}{4}[a+\sqrt{a^2-16y_1}\pm(\sqrt{a^2-16y_2}+\sqrt{a^2-16y_3})],$$

$$x_3 \text{ und } x_4=-\tfrac{1}{4}[a-\sqrt{a^2-16y_1}\pm(\sqrt{a^2-16y_2}-\sqrt{a^2-16y_3})].$$

D. Auflösung der numerischen Gleichungen von höheren Graden mit einer Unbekannten.

§. 99.

1) Auflösung durch Zerlegung in Factoren.

Lehrsatz: Eine numerische Gleichung, in welcher die Coefficienten ganze Zahlen sind, kann keinen rationalen Bruch zur Wurzel haben.

Beweis: Sei $x=\frac{\alpha}{\beta}$ und

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots.+T=0,$$

so ist auch, nachdem $x=\frac{\alpha}{\beta}$ substituirt und die Gleichung mit β^{n-1} multiplicirt ist,

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\alpha^{n-1} + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2}\,\beta + \ldots + T\beta^{n-1} = 0,$$

was offenbar nicht möglich ist.

Hieraus folgt nun, daß die rationalen Wurzeln der Gleichung ganze Factoren des Absolutgliedes T sind. Wenn man also das Absolutglied in seine ganzen Factoren zerlegt und dieselben für x, je nachdem das Polynom Zeichenwechsel oder Zeichenfolgen hat, sowohl positiv als negativ nach und nach einsetzt, so sind diejenigen Factoren, welche das Polynom X zu Null machen, Wurzeln der Gleichung.

Harriot'scher Lehrsatz: Jede Gleichung, in welcher kein Glied fehlt, kann nicht mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel und nicht mehr negative Wurzeln als Zeichenfolgen haben.

Methode der Ausschließung der Factoren, welche keine Wurzeln sind. Wenn das letzte Glied viele einfache Factoren besitzt, so kann man oft mit Vortheil erst viele Factoren ausschließen. Zu dem Ende setze man in dem Polynom $X = 0$ $x = \pm 1$ ein und bezeichne die Resultate mit R und R_1. Diejenigen Factoren von T, welche positiv genommen um 1 vermindert kein Maß von R und zugleich um 1 vermehrt kein Maß von R_1 sind, können keine Wurzeln der Gleichung sein. Ebenso sind jene Factoren, welche negativ genommen um 1 vermindert kein Maß von R_1 und um 1 vermehrt kein Maß von R sind, als Nichtwurzeln auszulassen.

Zahlenbeispiel: Nr. 6: $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$.

Die Gleichung hat 2 positive, 1 negative Wurzel. Factoren von 36 sind $\pm$ (1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36).

Coefficienten:	1	-4	-9	$+36$
$x = +1$	1	-3	-12	$+24\ (= R)$
-1	1	-5	-4	$+40\ (= R_1)$

Factoren von R sind	$-2-1$,	von R_1	$-2+1$
	$\pm 3 - 1$		$\pm 3 + 1$
	$+4-1$		$+4+1$
	$+9-1$		$+9+1$

Die Wurzeln sind also unter den Zahlen $-2, \pm 3, +4, +9$ enthalten, nämlich $+3, -3, +4$.

§. 100.

2) Auflösung der Gleichungen durch die Newton'sche Näherungsmethode.

1) Sind p und $p+1$ zwei aufeinander folgende ganze Zahlen, welche die in §. 94 Nr. 6 angegebene Eigenschaft besitzen, so ist p ein Näherungswerth der Wurzel. Angenommen, es seien die den Werthen $x = p$ und $x = p + 1$ entsprechenden Werthe der Functionen x gleich φ und $\varphi_{\prime}$, welche man Fehler der Gleichung nennt (vergl. §. 82, 14, β), so kann man gemäß des Satzes §. 94. 5, α) annehmen, daß die Aenderung der Function X der Veränderung des Werthes x nahezu proportional sei (regula falsi). *) Es wird also die Function ihr Vorzeichen ändern nahezu bei

$$x = n = p + \frac{\varphi \cdot 1}{\varphi - \varphi_{\prime}} = \frac{(p+1)\varphi - p\varphi_{\prime}}{\varphi - \varphi_{\prime}}.$$

Dieser Werth n wird alsdann der Gleichung näherungsweise Genüge leisten.

Beispiel 4) $x^3 + 3x - 5 = 0$.

$$x = 1,\ \varphi = -1,$$

$$x = 2,\ \varphi_{\prime} = +9,\ n = \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 9}{-1 - 9} = 1{,}1$$

1—3) Wenn der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + p = 0$ durch den für x gesetzten Werth n näherungsweise Genüge geleistet wird, so findet man die Correction h, um welche man n zu vermehren hat, um einen genaueren Werth zu erhalten, indem man $x = n + h$ in die Function einsetzt und die neue Gleichung nach h auflöst. Dabei kann man der relativen Kleinheit wegen die höheren Potenzen von h gegen die erste vernachlässigen. Man kann alsdann $n + h$ als einen neuen Näherungswerth $n_{\prime}$ ansehen und die Correction $h_{\prime}$ berechnen u. s. w.

Die Correction

$$h = -\frac{n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + \ldots + p}{m \cdot n^{m-1} + (m-1) \cdot a \cdot n^{m-2} + (m-2) \cdot b \cdot n^{m-3} + \ldots}.$$

*) Methode der regula falsi bei der Auflösung transcendenter Gleichungen. §. 106.

§. 101.

3) Auflösungen der Gleichungen durch Kettenbrüche.

1) Methode von Lagrange. Ist p der in §. 100, 1) angedeutete ganze Näherungswerth einer Wurzel, so substituire man $x = p + \frac{1}{y}$ in der Function X, ordne nach y. Ist $p_{\prime}$ für die Function Y, was p für X ist, so setze $y = p_{\prime} + \frac{1}{z}$ u. s. f. Alsdann ist

$$x = p + \cfrac{1}{p_{\prime} + \cfrac{1}{p_{\prime\prime} + \cfrac{1}{p_{\prime\prime\prime} + \dots}}}$$

§. 102.

4) Auflösung der Gleichungen durch Theilbruchreihen.

1) Methode von Heis. Ist $p > x > p + 1$, so setze man $x = p + \frac{1}{y}$ in die Function ein und ordne nach y. Ist $p_{\prime} > y > p_{\prime} + 1$, so setze weiter $y = (p_{\prime} + 1)\frac{z}{z+1}$ und ordne nach z. Ist $p_{\prime\prime} > z > p_{\prime\prime} + 1$, so setze $z = (p_{\prime\prime} + 1)\frac{t}{t+1}$ u. s. f., so ist

$$x = p + \frac{1}{p_{\prime} + 1} + \frac{1}{p_{\prime\prime} + 1} A_1 + \frac{1}{p_{\prime\prime\prime} + 1} A_2 + \dots$$

Vergleiche §. 86.

§. 103.

5) Gräffe'sche Methode.

Diese Methode, numerische Gleichungen aufzulösen, beruht auf dem Verfahren, daß man aus einer gegebenen Gleichung eine neue ableitet (transformirt), deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, daß man mit der neuen ebenso verfährt u. s. f., bis die Logarithmen der Coefficienten sich verdoppeln, vorausgesetzt, daß alle Wurzeln von einander verschieden sind.

der Gleichung. Wenn δ und $\delta_{\prime}$ verhältnißmäßig klein sind, so wird es gestattet sein, einstweilen die höheren Potenzen derselben zu vernachlässigen. Es ist also

$$\varphi = Ap^{a} + Bp^{b} + Cp^{c} + \ldots.,$$

$$\varphi_{\prime} = Aq^{a} + Bq^{b} + Cq^{c} + \ldots.,$$

also auch, wenn man von jeder dieser Gleichungen

$$0 = A\alpha^{a} + B\alpha^{b} + C\alpha^{c} + \ldots.$$

subtrahirt,

$$\varphi = A(p^{a} - \alpha^{a}) + B(p^{b} - \alpha^{b}) + C(p^{c} - \alpha^{c}) + \ldots.,$$

$$\varphi_{\prime} = A(q^{a} - \alpha^{a}) + B(q^{b} - \alpha^{b}) + C(q^{b} - \alpha^{c}) + \ldots.,$$

oder wegen $p = \alpha + \delta$ und

$$p^{a} = (\alpha + \delta)^{a} = \alpha^{a} + a \cdot \alpha^{a-1} \cdot \delta,$$

$$p^{b} = (\alpha + \delta)^{b} = \alpha^{b} + b \cdot \alpha^{b-1} \cdot \delta, \text{ u. s. w.}$$

auch

$$\varphi = \delta(A \cdot a \cdot \alpha^{a-1} + B \cdot b \cdot \alpha^{b-1} + C \cdot c \cdot \alpha^{c-1} + \ldots.),$$

$$\varphi_{\prime} = \delta_{\prime}(A \cdot a \cdot \alpha^{a-1} + B \cdot b \cdot \alpha^{b-1} + C \cdot c \cdot \alpha^{c-1} + \ldots.).$$

Folglich ist

$$\varphi : \varphi_{\prime} = \delta \cdot \delta_{\prime},$$

d. h. es verhalten sich für sehr kleine Werthe der Substitutionsfehler die Fehler der Gleichung wie die Fehler der Substitutionen.

Substituirt man nun in $\varphi : \varphi_{\prime} = \delta : \delta_{\prime}$ für δ und $\delta_{\prime}$ die Werthe $p - \alpha$ und $q - \alpha$, so findet man den Näherungswerth

$$\alpha = \frac{p \cdot \varphi_{\prime} - q \cdot \varphi}{\varphi_{\prime} - \varphi}.$$

Ist nun q genauer als p und $\alpha = r$ genauer als q, $\varphi_{\prime\prime}$ der Fehler der Gleichung für r, so ist ein noch genauerer Werth

$$\alpha_{\prime} = \frac{q \cdot \varphi_{\prime\prime} - r \cdot \varphi_{\prime}}{\varphi_{\prime\prime} - \varphi_{\prime}}$$

u. s. w.

Man fährt hiermit fort, bis α hinreichend genau bestimmt ist.

